Vizsgatémakörök (Számelmélet2)

A szóbeli vizsgán mindenki egy témakört kap az alábbiak közül (sorsolás után), amiből kérdezek. Fontos, hogy mindent értsetek (bizonyításokat is), tudjatok példákat és ellenpéldákat mondani, tudjátok, hogy melyik lemma min múlik és a tételekhez hogy (és melyik lépésben) használtuk őket, ill. a tétel feltételeit. Kétféle opció közül lehet választani: (1) felkészülési idő nincs, viszont a saját jegyzeteiteket végig használhatjátok (arra persze nincs idő, hogy ott helyben értsetek meg valamit, de tényszerű dolgokat ki szabad puskázni) vagy (2) van felkészülési idő, de nem lehet semmit sem használni. A tematikából mindenki kihagyhat egy témakört. Azt, hogy melyiket hagytátok ki, a tételhúzás előtt kell jelezni.

1. Kombinatorikus számelmélet: csupa különböző összegek, Cauchy–Davenport, fedőrendszerek.
2. Gauß-egészek számelmélete, 2 négyzetszám tétel. 3 négyzetszám tétel a Hasse–Minkowski tétel felhasználásával.
3. Waring problémakör, $g(k)$ és $G(k)$ alsó becslése. Dirichlet-sorok konvergenciája, a Riemann-féle ζ-függvény.
4. Bináris kvadratikus alakok $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-ekvivalenciája, redukált alak. Adott negatív diszkriminánsú kvadratikus alakból ekvivalencia erejéig véges sok van. A páros diszkriminánsú esetben azon D-k meghatározása, melyekre $h(D) = 1$.
5. Dirichlet approximációs tétele. A Pell-egyenlet.
6. Minkowski rácsponttétele és alkalmazása a diofantikus approximációra. Liouville tétele, transzcendens szám konstrukciója. Thue tétele bizonyos diofantikus egyenletek megoldásszámának végességéről.
7. Az e és a π transzcendens.
8. Véges és végtelen Sidon-sorozatok.
9. A p-adikus számok. Hensel lemma és következményei. A multiplikatív csoport négyzetelemekkel vett faktorcsoportjának leírása.
10. A Hilbert-szimbólum és alaptulajdonságai, Hilbert reciprocitási tétele, racionális szám illesztése adott Hilbert-szimbólumra.
11. Kvadratikus alakok 2-től különböző karakterisztikában, a Hasse–Minkowski tétel.