# Számelmélet2 feladatok

6. feladatsor

Minden feladat helyes megoldása 1 pontot ér. A $J$-es jegyhez legalább $3J + 3$ pontot kell szerezni. Az órán kimondott tételeket szabad használni. Továbbá ebben a feladatsorban a feladatok némileg (az utolsó például kivétel, nem épül a korábbiakra) egymásra épülnek: a nagyobb sorszámú feladatok megoldásában szabad használni a kisebb sorszámú feladatokat.

1. Tegyük fel, hogy a $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$ és a $\sum_{i=1}^{n} b_i x_i^2$ kvadratikus alakok ekvivalensek (azaz alkalmas bázistranszformációval egymásba vihetők) és egyik se elfajuló, azaz $\prod_{i=1}^{n} a_i \neq 0 \neq \prod_{i=1}^{n} b_i$, továbbá $a_n = b_n$. Mutassuk meg, hogy a $\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i^2$ és a $\sum_{i=1}^{n-1} b_i x_i^2$ kvadratikus alakok is ekvivalensek.

2. Tegyük föl, hogy $\mathbb{Q}_p$ fölött az $f = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$ és a $g = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i^2$ kvadratikus alakok ekvivalensek. Mutassuk meg, hogy $d(f) = d(g)$ és $\varepsilon(f) = \varepsilon(g)$, ahol $d(f)$ (ill. $d(g)$) a $\prod_{i=1}^{n} a_i$ (ill. $\prod_{i=1}^{n} b_i$) osztálya $\mathbb{Q}_p^\times/(\mathbb{Q}_p^\times)^2$-ben, továbbá $\varepsilon(f) = \prod_{i<j}(a_i, a_j) \in \{\pm 1\}$ (és $\varepsilon(g) = \prod_{i<j}(b_i, b_j) \in \{\pm 1\}$), ahol $(a, b)$ a Hilbert szimbólum.

3. Legyen $f = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$ nemelfajuló kvadratikus alak $\mathbb{Q}_p$ fölött és $d = d(f)$, $\varepsilon = \varepsilon(f)$ az előző feladatban definiált invariánsok. Igazoljuk, hogy $f$ pontosan akkor izotróp (azaz előállítja a 0-t nemtriviálisan), ha az alábbi 5 eset valamelyike fennáll:
   - *(i)* $n = 2$ és $d = -1$ mellékosztálya $\mathbb{Q}_p^\times/(\mathbb{Q}_p^\times)^2$-ben;
   - *(ii)* $n = 3$ és $\varepsilon = (-1, -d)$;
   - *(iii)* $n = 4$ és $d \neq 1$;
   - *(iv)* $n = 4$, $d = 1$, és $\varepsilon = (-1, -1)$;
   - *(v)* $n \geq 5$.

4. Legyen $f$ és $g$ kvadratikus alak $\mathbb{Q}_p$ fölött. Mutassuk meg, hogy $f$ és $g$ pontosan akkor ekvivalens, ha megegyezik a rangjuk (mátrixuk rangja), továbbá $d(f) = d(g)$ és $\varepsilon(f) = \varepsilon(g)$.

5. Legyen $f$ és $f'$ kvadratikus alak $\mathbb{Q}$ fölött $(r, s)$, illetve $(r', s')$ szignatúrával (azaz a diagonális alakban $r$ pozitív és $s$ negatív szám van). Igazoljuk, hogy $f$ és $f'$ pontosan akkor ekvivalens $\mathbb{Q}$ fölött, ha minden $p$ prímre a lokális invariánsaik ($d$, ill. $\varepsilon$) megegyeznek és $(r, s) = (r', s')$.

6. Igazoljuk, hogy a $3x^3 + 4y^3 + 5z^3 = 0$ egyenletnek van $\mathbb{R}$-beli és minden $p$ prímre $\mathbb{Q}_p$-beli nemtriviális gyöke. (Az is igaz, hogy $\mathbb{Q}$-ban *nincs* nemtriviális gyöke, de ez nem feladat, mert kellene hozzá $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{6})$ számelmélete vagy elliptikus görbék.)