Számelmélet2 feladatok

5. feladatsor

Minden feladat helyes megoldása 1 pontot ér. A félév során legalább 24 feladat lesz összesen (várhatóan jóval több). A J-es jegyhez legalább $3J+3$ pontot kell szerezni. Az órán kimondott tételeket szabad használni.

1. Igazoljuk, hogy egy $\sum_{i=-m}^{\infty} a_i p^i$ ($a_i = 0, 1, \ldots, p-1$, $i \geq -m$) alakba írt p-adikus szám pontosan akkor racionális, ha jegyeinek sorozata egy bizonyos ponttól kezdve periodikus.
2. Igazoljuk, hogy ha $(a, p) = 1$ ($a \in \mathbb{Z}$), akkor az a^{p^n} sorozat konvergál $\mathbb{Q}_p$-ben.
3. Igazoljuk, hogy a $\mathbb{Q}_p$ test minden automorfizmusa folytonos, speciálisan identikus.
4. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{Q}_p$ algebrai lezártja $\mathbb{Q}_p$-nek végtelen bővítése.
5. Legyen $f(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n + \cdots \in \mathbb{Z}_p[[X]]$ p-adikus egész együtthatós formális hatványsor. Mutassuk meg, hogy f konvergens a $\{|X|_p < 1\}$ nyílt egységkörlapon és itt (legfeljebb) véges sok gyöke van.
6. Mi a $\log(1+x)$ és az $\exp(x)$ hatványsorának p-adikus konvergenciasugara? Igazoljuk, hogy ha p páratlan prím, akkor $\mathbb{Z}_p^\times \cong \mathbb{F}_p^\times \times \mathbb{Z}_p$ (itt a második $\mathbb{Z}_p$ a p-adikus egészek additív csoportja). Mutassuk meg továbbá, hogy $\mathbb{Z}_2^\times \cong \{\pm 1\} \times \mathbb{Z}_2$.