# Számelmélet2 feladatok

4. feladatsor

Minden feladat helyes megoldása 1 pontot ér. A félév során legalább 24 feladat lesz összesen (várhatóan jóval több). A $J$-es jegyhez legalább $3J+3$ pontot kell szerezni. Az órán kimondott tételeket szabad használni.

1. Legyen $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \dots$ pozitív egészeknek egy olyan sorozata, ahol minden $n$-re $a_n \mid a_{n+1}$, továbbá bármely $k$ pozitív egészhez létezik olyan $n$, amelyre $k \mid a_n$. Bizonyítsuk be, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ sor konvergens és az összege irracionális.

2. Legyen $p$ tetszőleges prímszám. Igazoljuk, hogy léteznek olyan $a_1 < a_2 < \cdots < a_p$ egész számok, hogy az $a_i + a_j$ összegek mind páronként inkongruensek modulo $p^2-1$.

3. Konstruáljunk olyan $A \subset \mathbb{N}$ végtelen Sidon sorozatot, melyre
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{A(n)}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{2}\ ,$$
ahol $A(n) = |A \cap [0,n]|$.

4. Mutassuk meg, hogy létezik egészeknek olyan $a_1 < a_2 < \dots$ végtelen sorozata, hogy a 0-n kívül minden egész szám egyértelműen írható fel $a_i - a_j$ alakban.

5. A természetes számok két (végtelen) részsorozatát, $A$-t és $B$-t nevezzük jó sorozatpárnak, ha az $a+b$ ($a \in A$, $b \in B$) összegek mind különbözők. Jó sorozatpárt kapunk például, ha egy Sidon-sorozatot két részre vágunk. Mutassuk meg, hogy léteznek ennél „sűrűbb” jó sorozatpárok is: adjunk meg olyat, amelynél minden $n$-re $A(n) > c\sqrt{n}$, $B(n) > c\sqrt{n}$ alkalmas $c > 0$ konstanssal.