Számelmélet2 feladatok

3. feladatsor

Minden feladat helyes megoldása 1 pontot ér. A félév során legalább 24 feladat lesz összesen (várhatóan jóval több). A J-es jegyhez legalább $3J + 3$ pontot kell szerezni. Az órán kimondott tételeket szabad használni.

1. Mely $p > 0$ prímszámok esetén oldható meg az $x^2 - py^2 = -1$ diofantikus egyenlet ($\mathbb{Z}$-ben)?

2. Legyen $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Igazoljuk, hogy $\{n\alpha\}$ mindenütt sűrű a $(0, 1)$ intervallumban.

3. Legyen $\kappa > 0$ tetszőleges valós szám és H azoknak az α valós számoknak a halmaza, amelyekhez végtelen sok olyan p/q racionális szám található, hogy $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{2+\kappa}}$ teljesül. Igazoljuk, hogy H nullmértékű.

4. A Minkowski-féle rácsponttétel alkalmazásával adjunk új bizonyítást arra, hogy minden $4k + 1$ alakú prímszám előáll két négyzetszám összegeként.

5. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges α_1 és α_2 irracionális számokhoz végtelen sok közös nevezőjű p_1/q, p_2/q racionális számpár létezik, amelyre $\left|\alpha_j - \frac{p_j}{q}\right| < \frac{2}{3q^{3/2}}$ $(j = 1, 2)$. (Használjuk Minkowski rácsponttételének háromdimenziós analogonját.)