Számelmélet2 feladatok

2. feladatsor

Minden feladat helyes megoldása 1 pontot ér. A félév során legalább 24 feladat lesz összesen (várhatóan jóval több). A J-es jegyhez legalább $3J+3$ pontot kell szerezni. Az órán kimondott tételeket szabad használni.

1. (a) Igazoljuk az alábbi azonosságot:

$$\sum_{1\le i<j\le 4}\left((x_i-x_j)^4+(x_i+x_j)^4\right)=6(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)^2\ .$$

   (b) Mutassuk meg, hogy $g(4)\le 53$.

2. Mutassuk meg, hogy $k=2^\alpha$ ($\alpha\ge 2$ egész) esetén $G(k)\ge 4k$.

3. Mi az a legkisebb pozitív egész szám, amit az $ax^2+bxy+cy^2$ *redukált* kvadratikus alak (valódian) előállít? Mutassuk meg, hogy két különböző redukált kvadratikus nem lehet *valódian* ekvivalens.

4. Igazoljuk, hogy egy m pozitív egész szám pontosan akkor áll elő x^2+7y^2 alakban (itt x és y nem feltétlenül relatív prím), ha $m\not\equiv 2 \pmod 4$ és m prímtényezős felbontásában minden olyan p prím páros hatványon szerepel, melyre $p\equiv 3,5$, vagy $6 \pmod 7$.

5. Igazoljuk, hogy valódi ekvivalencia erejéig az $x^2+xy+41y^2$ az egyetlen -163 diszkriminánsú kvadratikus forma.

6. Mely prímek állnak elő x^2+10y^2 alakban?