Számelmélet2 feladatok

1. feladatsor

Minden feladat helyes megoldása 1 pontot ér. A félév során legalább 24 feladat lesz összesen (várhatóan jóval több). A J-es jegyhez legalább $3J+3$ pontot kell szerezni. Az órán kimondott tételeket szabad használni.

1. Legyen K egy test és $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ egy n-változós polinom és tegyük fel, hogy $\deg(f) = \sum_{i=1}^n t_i$, ahol f-ben az $x_1^{t_1} \cdots x_n^{t_n}$ tag együtthatója nem 0 valamilyen $t_i \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ $(i = 1, \dots, n)$ szám n-esre. Tegyük fel továbbá, hogy $S_i \subseteq K$ és $|S_i| \geq t_i + 1$ minden $i = 1, \dots, n$-re. Igazoljuk, hogy létezik olyan $(s_1, \dots, s_n) \in S_1 \times \cdots \times S_n$, melyre $f(s_1, \dots, s_n) \neq 0$.
2. Legyen p prím és $A \subseteq \mathbb{F}_p$. Bizonyítsuk be, hogy ha $2|A| - 3 \leq p$, akkor $|\{a + a' \mid a \neq a' \in A\}| \geq 2|A| - 3$.
3. Legyenek $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ és $0 < b_1 < b_2 < \cdots < b_k$ valós számok, melyekre $a_1 + \cdots + a_i \geq b_1 + \cdots + b_i$ minden $i = 1, \dots, k$-ra. Igazoljuk, hogy ekkor $\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_k} \leq \frac{1}{b_1} + \cdots + \frac{1}{b_k}$. Melyik órán tanult tételre tudunk ennek segítségével új bizonyítást adni?
4. Jelöljük $s(n)$-nel azt a legnagyobb k egész számot, melyre van olyan $1 < a_1 < \cdots < a_k \leq n$ szám k-as, melyre bármely részhalmaz szorzata különböző (az üres szorzat 1). Igazoljuk, hogy $|s(n) - \pi(n)| < 2n^{2/3}$, ahol $\pi(n)$ az n-nél nem nagyobb prímek számát jelöli.
5. Oldjuk meg az $x^2 + 4 = y^3$ diofantikus egyenletet ($\mathbb{Z}$-ben).
6. Igazoljuk, hogy minden pozitív egész szám előáll (legfeljebb) három háromszög-szám (azaz $\frac{n(n-1)}{2}$ alakú, $n \geq 1$ egész) összegeként.