Sidon-sorozatok

Def.: $a_1 < a_2 < \dots \subset \mathbb{N}$ sorozat Sidon-sorozat, ha az $a_i + a_j$ összegek mind különbözők: $a_i + a_j = a_k + a_l \Leftrightarrow (i,j) = (k,l)$ v. (l,k).

Sidon Simon, Fourier-sorok (1930-)

Hány eleme lehet? $[1,n]$-ban s hosszú Sidon-sorozat

$$\frac{s(s+1)}{2} = \binom{s+1}{2} \le 2n \Rightarrow s \le 2\sqrt{n}$$

$$a_i + a_j = a_k + a_l \Leftrightarrow$$
$$a_i - a_k = a_l - a_j$$

$i > k$
$l > j$

$$\binom{s}{2} \le n \Rightarrow s \le \sqrt{2}\sqrt{n}.$$

Tétel (Erdős – Turán, Lindström, 1941) Ha $[1, n]$-ben van egy s hosszú Sidon-sorozat, akkor $s \leq n^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{4}} + 1$

Biz.: $(t-1)$-hosszú zárt intervallumot végigtoljuk az $[0, n]$-en. $S \subseteq [1, n]$

$$A_1 := \left| S \cap [-t+1, 0] \right|, \quad A_2 := \left| S \cap [-t+2, 1] \right|,$$

$$\ldots \quad A_{n+t} := \left| S \cap [n, n+t-1] \right|. \qquad s = |S|.$$

$$\sum_{i=1}^{t+n} A_i = t \cdot s$$

$$D := \sum_{i=1}^{n+t} \binom{A_i}{2} = \sum_{i=1}^{n+t} \frac{A_i^2}{2} - \sum_{i=1}^{n+t} \frac{A_i}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+t} A_i^2 - \frac{ts}{2}$$

$\{a_j, a_k\} \subset A_i$ párok száma
$j < k$

$a_k - a_j = d \Rightarrow (t-d)$-db A_i-be esik bele.

Sidon-sorozat $\Rightarrow$ különbségek egyediek. $(d \leq t-1)$

$$\Rightarrow \quad D \leq \sum_{d=1}^{t-1} (t-d) = \frac{t(t-1)}{2}$$

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^{n+t} A_i\right)^2}{n+t} - ts \leq \sum_{i=1}^{n+t} A_i^2 - ts \leq t(t-1)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{(ts)^2}{n+t} - ts \leq t(t-1).$$

$$\Updownarrow$$

$$s^2 - s \cdot \frac{n+t}{t} - (t-1)\frac{n+t}{t} \leq 0.$$

$$\Updownarrow$$

$$s \leq \frac{n+t}{2t} + \sqrt{\frac{(n+t)^2}{4t^2} + (t-1)\frac{n+t}{t}} = \frac{n}{2t} + \frac{1}{2} + \sqrt{n+t+\frac{n^2}{4t^2} - \frac{n}{2t} - \frac{3}{4}}$$

$$t := \lfloor n^{\frac{3}{4}} \rfloor + 1$$

$$< \frac{n^{\frac14}+1}{2} + \sqrt{\frac{(n^{\frac14}+1)^2}{4} + n^{\frac34}(n^{\frac14}+1)} < \frac{n^{1/4}+1}{2} + n^{\frac12} + \frac{n^{1/4}+1}{2} = n^{1/2} + n^{1/4} + 1,$$

mert $\left(n^{\frac12} + \frac{n^{\frac14}+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{n^{\frac14}+1}{2}\right)^2 + n^{1/2}(n^{\frac14}+1) + n$ $\square$

<u>Tétel</u> Legyen p prím és $n = p^2+p+1 \Rightarrow \exists$ Sidon-sorozat $[1, n]$-ben, aminek $p+1 = \lfloor\sqrt{n}\rfloor + 1$ eleme van.

Biz.: Cél: $a_i - a_j$ páronként inkongruensek mod n

$a_1, \dots, a_{p+1} \in \mathbb{Z}$.

$\mathbb{F}_{p^3}^\times$ ciklikus (p^3-1)-rendű. $n = p^2+p+1$

$g \in$ generátor. $g^{p^3-1} = (g^n)^{p-1} = 1 \Rightarrow g^n \in \mathbb{F}_p^\times$ generátor.

$o(g^n) = \frac{p^3-1}{(n, p^3-1)} = \frac{p^3-1}{n} = p-1$.

$\mathbb{F}_p = \{0, g^n, g^{2n}, \dots, g^{(p-1)n}\}$, $g^{(p-1)n} = 1$

$\alpha, \beta \in \mathbb{F}_{p^3}^\times$ lin. ö.f. / $\mathbb{F}_p$ fölött $\Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{F}_p^\times$, azaz g^{rn} alakú $r \in \mathbb{Z}$.

$\alpha \in \mathbb{F}_{p^3} \setminus \mathbb{F}_p$ $\qquad$ $\underbrace{\alpha + \gamma_j}_{\notin \mathbb{F}_p} = g^{a_j}$

$\mathbb{F}_p = \{0, g^n, \ldots, g^{(p-1)n}\} = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_p\}$, $\quad n \in \{1, \ldots, p^3-1\}$

$\rightsquigarrow a_1, \ldots, a_p, \quad a_{p+1} := 0.$

Áll.: $a_i + a_j \not\equiv a_k + a_l \ (n)$, ha $\{i,j\} \neq \{k,l\}$.

Biz.: Tfh. $a_i + a_j \equiv a_k + a_l \ (n)$

$$g^{a_i+a_j} = (\alpha+\gamma_i)(\alpha+\gamma_j) = \gamma(\alpha+\gamma_k)(\alpha+\gamma_l) = \gamma\, g^{a_k+a_l}$$

α foka $\mathbb{F}_p$ fölött 3, ezért α nem gyöke ≤ 2-fokú $\not\equiv 0$ polinomnak $\gamma \in \mathbb{F}_p^\times$.

$\Rightarrow$
$$(x+\gamma_i)(x+\gamma_j) = \gamma(x+\gamma_k)(x+\gamma_l) \Rightarrow \gamma = 1$$

$\gamma_i\gamma_j = \gamma_k\gamma_l$ és $\gamma_i + \gamma_j = \gamma_k + \gamma_l$.

$$\Rightarrow \{\gamma_i, \gamma_j\} = \{\gamma_k, \gamma_l\} \Rightarrow \{i; j\} = \{k, l\}.$$

$i, j, k, l \in P.$ $\quad i = p+1 \quad a_{p+1} = 0 \equiv a_k + a_l$

$$g^{a_j} = \alpha + \gamma_j = \gamma(\alpha + \gamma_k)(\alpha + \gamma_l) \Rightarrow \gamma = 0 \quad \lightning$$

$\square$

Legyen p maximális úgy, hogy $p^2 + p + 1 \leq n$.

$$g_k := p_{k+1} - p_k$$

Legjobb: $k \gg 0$.

$g_q < p_q^{\Theta}$

30-as évek: Hoheisel $\Theta = \frac{32999}{33000}$

Heilbronn: $\Theta = \frac{249}{250}$

Csudakov: $\Theta = \frac{3}{4} + \varepsilon$

Ingham: $\Theta = \frac{5}{8} + \varepsilon$

1972: Huxley: $\Theta = \frac{7}{12}$ $\Rightarrow$ $\exists$ Sidon-sorozat $[1,n]$-ben, aminek min. $n^{\frac{1}{2}} - n^{0,2625}$

Riemann-sejtés $\Rightarrow$ $g_n \leq c \cdot \sqrt{p_n} \log p_n$

$\left(\Rightarrow \sqrt{n} - \sqrt[4]{n} \log n \right)$

$$\liminf g_n \overset{?}{<}$$

Goldston – Pintz – Yildirim (2005) $\liminf \dfrac{g_n}{\log p_n} = 0.$

(2007:) $\liminf \dfrac{g_n}{\sqrt{\log p_n}\,(\log\log p_n)^2} < \infty$

(2013) Zhang: $\liminf g_n < \infty$

$< 7 \cdot 10^7$

Polymath + Maynard: 246.

Végtelen Sidon-sorozatok

$A \subset \mathbb{N}$ $\quad A(n) := A \cap [1, n]$.

Tétel $\liminf_{n\to\infty} \frac{A(n)}{\sqrt{\frac{n}{\log n}}} < \infty$. Spec. $\liminf_{n\to\infty} \frac{A(n)}{\sqrt{n}} = 0$.

Biz.: $N \gg 0$. $\quad A_i := A(iN) - A((i-1)N) = |A \cap ((i-1)N, iN]|$

$$\sum_{i=1}^{N} \binom{A_i}{2} \le \sum_{i=1}^{\infty} \binom{A_i}{2} < N \Rightarrow 2N > \sum_{i=1}^{N} A_i(A_i - 1)$$

$$\ge \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} (A_i - 1)^2$$

$$\sum_{i=1}^{N} A_i^2 < 5N$$

$$S := \sum_{i=1}^{N} \frac{A_i}{\sqrt{i}} \underset{\text{CBS}}{\leq} \sqrt{\left(\sum A_i^2\right)\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i}\right)}_{\log N}} < \sqrt{5N(\log N)}$$

$$S = \sum_{i=1}^{N} \frac{A(iN) - A((i-1)N)}{\sqrt{i}} > \sum_{i=1}^{N-1} A(iN)\left(\frac{1}{\sqrt{i}} - \frac{1}{\sqrt{i+1}}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N-1} A(iN)\left(\frac{2(i+1) - 2\sqrt{i(i+1)}}{2(i+1)\sqrt{i}}\right) >$$

$$> \sum_{i=1}^{N-1} A(i,N) \frac{1}{2(i+1)\sqrt{i}}$$

Tfh. $A(i,N) > c \cdot \sqrt{\frac{iN}{\log(iN)}}$

$\sqrt{5N\log N}$

$$> S > c \cdot \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\sqrt{\cancel{i}N}}{2\sqrt{\log(iN)}} \cdot \frac{1}{(i+1)\cancel{\sqrt{i}}} > c \cdot \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\sqrt{N}}{2(i+1)\sqrt{\log N^2}} >$$

$> c_1 \cdot \sqrt{N \log N}$, mert

$\sum \frac{1}{i+1} \sim \log N$

D

$c > \sqrt{40}$ ↯

Alulról? Sejtés (Erdős) $\exists$ Sidon sorozat, hogy

$$A(n) \gg_\varepsilon n^{\frac{1}{2}-\varepsilon}.$$

(1981) Ajtai, Komlós, Szemerédi: $A(n) > c \cdot \sqrt[3]{n \log n}$

(1997) Ruzsa: $A(n) > c \cdot n^{\sqrt{2}-1-\varepsilon}$ (Erdős–Rényi véletlen)

<u>Tétel</u> (Ruzsa) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, m > 0$ egész és $A = \{1 \le a_1 < a_2 < \dots\} \subseteq \mathbb{N}$ sorozat, melyre $\liminf_{n \to \infty} \frac{A(n)}{n^{\frac{1}{2}-\varepsilon}} > 0$ és bármely egész $\le m$-féleképpen írható $a_i + a_j$ alakban.

Biz.: $c_0 + c_1 q_1 + c_2 q_1 q_2 + \ldots + c_i q_1 \cdots q_i + \ldots +$

alakban írjuk a számokat

$1 < q_1$, $q_{i+1} \approx q_i^{1+\delta}$ $\quad 0 \leq c_i < q_{i+1}$

$S_i := \left[0, \frac{q_i}{2}\right]$-ben egy Sidon-sorozat.

$|S_i| \geq \sqrt{\frac{q_i}{3}}$ megy.

$A := \{$azon számok, melyekre $c_i \in S_{i+1}$ $\forall i$ és $\leq t$ db nemnulla$\}$

$m := 2^{2t}$-féleképpen áll elő minden szám legfeljebb $a_i + a_j$ összegként $(a_i, a_j \in A)$

$$r_1 =: r, \quad r_i = \left\lfloor r^{(1+\delta)^{i-1}} \right\rfloor$$

$$|S_i| > \sqrt{\frac{r_i}{3}} > r^{h_i} \qquad h_i = \frac{(\delta+1)^{i-1} - \log_r 4}{2}$$

$$r_1 \cdots r_j \le n < r_1 \cdots r_j r_{j+1}$$

Kell: $$A(n) \ge |S_1| \cdots |S_{j-1}| \ge \underbrace{|S_{j-t}| \cdots |S_{j-1}|}_{> r^{\sum_{i=j-t}^{j-1} h_i} = r^{\sum_{i=j-t}^{j-1} (\delta+1)^{i-1}/2 - \frac{t \log_r 4}{2}}} > n^{\frac{1}{2} - \varepsilon}$$

$$\log_r A(n) > \sum h_i = \frac{(1+\delta)^j - (1+\delta)^{j-t}}{2\delta} - \frac{t \log_r 4}{2}$$

$$\log_r n < 1 + (1+\delta) + \dots + (1+\delta)^j < \frac{(1+\delta)^{j+1}}{\delta}$$

Ziel: $\dfrac{2\log_r A(n)}{\log_r(n)} > 1 - 2\varepsilon$

$$> \frac{(1+\delta)^{j} - (1+\delta)^{j-t} - t\delta\log_r 4}{(1+\delta)^{j+1}} =$$

$$= \frac{1-(1+\delta)^{-t}}{1+\delta} - \frac{t\delta\log_r 4}{(1+\delta)^{j+1}}$$

$\square$