

Bizonyítandó vizsgakérdések (Számelmélet 1 Intenzív, 2021/22 ősz)

A vizsgán mindenki egy tételt húz az alábbi első 14-ből, mellyel legfeljebb 4-est lehet szerezni. Az 5-öshöz a továbbiak (15-21) közül egy szabadon választott tételből is le kell felelni.

1. Végtelen sok prím van. Végtelen sok $4k - 1$ alakú prím van, általánosítások.
2. Euklideszi algoritmus, a kitüntetett közös osztó előállítása egész együtthatós lineáris kombinációként.
3. A számelmélet alaptétele.
4. Kanonikus alak, osztók számának, két szám legnagyobb közös osztójának és legkisebb közös többszörösének leolvasása. Legendre formula a faktoriális prímfelbontására.
5. Az Euler-féle φ -függvény, kiszámítása a prímtényezős felbontásból. Az Euler–Fermat-tétel, a Wilson-tétel.
6. Lineáris kongruenciák és kétváltozós lineáris diofantikus egyenletek megoldhatósága, megoldása.
7. Pitagoraszai számhármak paraméterezése.
8. Szimultán kongruenciarendszerek, a kínai maradéktétel.
9. Prímhatványalapú kongruenciák visszavezetése prímalapúra, Hensel-lemma.
10. Nevezetes számelméleti függvények, képletük. Additív és multiplikatív számelméleti függvények.
11. Összegzési függvény, Möbius megfordítási formula.
12. Páros tökéletes számok jellemzése.
13. Rend, primitív gyök, index. Mod p létezik primitív gyök, ha p prím.
14. Kvadratikus maradékok, Legendre-szimbólum, Jacobi-szimbólum, alaptulajdonságaik, Euler-lemma. Kvadratikus reciprocitás (NB), a Legendre-szimbólum kiszámítása.

Az 5-ösért választható tételek:

15. Azon m egész számok jellemzése, melyekre mod m létezik primitív gyök.
16. 2 négyzetszám- és 4 négyzetszám tétel.
17. A $\pi(x)$ alsó és felső becslése.
18. Csebisev-tétel, a prímek reciprokösszege.
19. Annak a valószínűsége, hogy két pozitív egész szám relatív prím; $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ igazolása.
20. A kombinatorikus nullhelytétel, a Chevalley–Warning-tétel, alkalmazások.
21. Prímek $x^2 + 2y^2$, $x^2 - 2y^2$, ill. $x^2 - 3y^2$ alakban.