9. gyakorlat

1. Igazoljuk, hogy ha $p \nmid a$, $p \nmid b$ és c tetszőleges egészek, akkor az $ax^2 + by^2 \equiv c \pmod p$ kongruencia megoldható.
2. Mutassuk meg, hogy végtelen sok olyan prím van, amelynek (tízes számrendszerben)
   (a) az első számjegye 1-es;
   (b) az első ezer számjegye 4-es.
3. (a) Bizonyítsuk be, hogy $\binom{2n}{n}$ minden $n+1 \le p \le 2n$ prímszámnak pontosan az első hatványával osztható.
   (b) Mutassuk meg, hogy ha $p > 3$ prím és $2n/5 < p \le n/2$, akkor $\binom{2n}{n}$ nem osztható p-vel.
4. Igazoljuk a prímszámtétel felhasználásával a következő becsléseket.
   (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{p\le n} \log p = 1$.
   (b) Az n-nél nem nagyobb prímek szorzata „körülbelül" e^n az alábbi értelemben: Bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan n_0, hogy minden $n > n_0$-ra
   $$e^{(1-\varepsilon)n} < \prod_{p\le n} p < e^{(1+\varepsilon)n} .$$
5. Bizonyítsuk be, hogy $n > 1$ esetén $n!$ nem lehet teljes hatvány.

6.* Milyen alsó és felső becslést kapnatunk p_n-re, ha a prímszámtétel helyett a $c_1 \frac{x}{\log x} < \pi(x) < c_2 \frac{x}{\log x}$ becslést használjuk.

7.* Bizonyítsuk be, hogy bármely $\varepsilon > 0$-hoz végtelen sok olyan n pozitív egész létezik, amelyre $p_{n+1} - p_n < (1+\varepsilon)\log n$. (Itt p_n az n-edik prímszámot jelöli.)