7. gyakorlat

1. Határozzuk meg 4 rendjét modulo 21.
2. Legyen $p > 2$ prím és $(a, p) = 1$. Igazoljuk, hogy $o_p(a)$ pontosan akkor páros, ha létezik olyan s, amelyre $a^s \equiv -1 \pmod{p}$.
3. Bizonyítsuk be, hogy ha a rendje 3 modulo p (prím), akkor $a + 1$ rendje 6.
4. Adjunk meg olyan egész számot, ami egyszerre primitív gyök modulo 11 és modulo 14 is.
5. Adjunk meg egy primitív gyököt modulo 625 és egy olyan számot is, ami modulo 5 primitív gyök, de modulo 625 nem.
6. Legyenek $1 < a, n$ egészek. Igazoljuk, hogy $n \mid \varphi(a^n - 1)$.
7. Legyen $\alpha \geq 3$. Igazoljuk, hogy $o_{2^\alpha}(5) = 2^{\alpha-2}$. Továbbá mutassuk meg, hogy a $\{\pm 5^k \mid 0 \leq k < 2^{\alpha-2}\}$ számok redukált maradékrendszert alkotnak modulo 2^α.

8.* Bizonyítsuk be, hogy páratlan prímekre fennáll a következő

$$\sum_{i=1}^{p-1} i^{p-1} \equiv p + (p-1)! \pmod{p^2}.$$

9.* Az f számelméleti függvény összegzési függvénye 2^n, azaz

$$\sum_{d \mid n} f(d) = 2^n$$

minden n természetes számra. Bizonyítsuk be, hogy $n \mid f(n)$.