

## 6. gyakorlat

1. Egy szigeten 7- és 11-fejű sárkányok élnek. Egy arratévedt királyfi le akarta győzni az összeset, ezért megszámolta, hány feje van a sárkányoknak összesen (hogy tudja, mire vállalkozik).
  - (a) Hány sárkány van, ha 75 fejet számolt?
  - (b) 59 fejet számolt. Igazoljuk, hogy elszámolta.
  - (c) Most számolás előtt levágta az összes sárkánynak 1-1 fejét és ezután 40 fejet számolt. Hány sárkány lehetett összesen?

2. Oldjuk meg az alábbi szimultán kongruenciákat:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & x \equiv 3 \pmod{5} & \text{(b)} & x \equiv 2 \pmod{5} & \text{(c)} & 3x \equiv 1 \pmod{4} \\ & x \equiv 4 \pmod{7} & & x \equiv 3 \pmod{6} & & 2x \equiv 3 \pmod{5} \\ & & & x \equiv 4 \pmod{8} & & 5x \equiv 2 \pmod{7}. \end{array}$$

3.
  - (a) Oldjuk meg az  $x^3 - 2x - 1 \equiv \pmod{125}$  kongruenciát!
  - (b) Tegyük fel, hogy  $p$  páratlan prím és  $p \nmid a$ . Igazoljuk, hogy az  $x^2 \equiv a \pmod{p}$  kongruencia pontosan akkor oldható meg, ha az  $x^2 \equiv a \pmod{p^n}$  kongruencia minden  $n \geq 1$ -re megoldható.
  - (c) Legyen  $a \equiv 1 \pmod{8}$ . Mutassuk meg, hogy az  $x^2 \equiv a \pmod{2^n}$  kongruencia minden  $n \geq 1$ -re megoldható.
4. Igazoljuk, hogy multiplikatív számelméleti függvény összegzési függvénye multiplikatív. Igaz-e a megfordítás? És multiplikatív helyett additívval?
5. Igazoljuk az alábbi egyenlőségeket minden  $n > 1$  egészre és határozzuk meg, mikor áll fenn egyenlőség:
  - (a)  $\sigma(n)\varphi(n) \leq n^2 - 1$
  - (b)  $\sigma(n) + \varphi(n) \geq 2n$
  - (c)\*  $\sigma(n)\varphi(n) > n^2/2$
  - (d)\*  $\inf \frac{\sigma(n)\varphi(n)}{n^2} = \frac{1}{\zeta(2)} (= \frac{6}{\pi^2})$ .
6. Legyen  $p$  prím, és jelölje az  $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$  kongruencia megoldásszámát  $r$ . Mutassuk meg, hogy

$$r \equiv - \sum_{i=0}^{p-1} f(i)^{p-1} \pmod{p} .$$

7. Igazoljuk, hogy tetszőleges  $N$  természetes számra van olyan  $N$  egymást követő egész szám, melyek egyike sem négyzetmentes.
- 8\* Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges  $a_1, a_2, a_3$  egész számokhoz létezik végtelen sok olyan  $n$  természetes szám, amelyre  $a_1 + n, a_2 + n, a_3 + n$  páronként relatív prímek.
- 9\* Legyenek  $a$  és  $b$  egymáshoz relatív prím pozitív egészek. Melyik az a legnagyobb egész szám, ami nem áll elő  $ax + by$  alakban, ahol  $x, y \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ ?