5. gyakorlat

1. Oldjuk meg az alábbi kongruenciákat:

   a) $26x \equiv 39 \pmod{46}$;

   b) $24x \equiv 60 \pmod{51}$;

   c) $100x \equiv 88 \pmod{116}$;

   d) $555x \equiv 5555 \pmod{55555}$;

   e) $(2^k + 1)x \equiv 2^{k+1} + 1 \pmod{2^{k+2} + 1}$;

   f) $10x^{39} + 8x^{20} + 9x^3 + 7x \equiv 0 \pmod{19}$;

   g) $13x^{41} \equiv 27 \pmod{100}$.

2. Határozzuk meg 3^{42} legkisebb pozitív maradékát 29-cel osztva.

3. Melyek igazak az alábbi állítások közül?

   a) Az $ax \equiv b \pmod{m}$ megoldásszáma legfeljebb b, ha $b > 0$.

   b) Ha az $ax \equiv b \pmod{m}$ kongruencia megoldható, akkor az $a^2x \equiv b^2 \pmod{m^2}$ kongruencia is.

   c) Ha az $a_ix \equiv b_i \pmod{m_i}$ kongruenciák megoldhatók ($i = 1, 2$), akkor az $a_1a_2x \equiv b_1b_2 \pmod{m_1m_2}$ kongruencia is.

4. Bizonyítsuk be, hogy a $4^s(8k + 7)$ alakú számok nem állnak elő 3 négyzetszám összegeként.

5. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok egész szám nem áll elő 3 köbszám összegeként.

6. Legyen a és m rögzített, és jelöljük $f(b)$-vel az $ax \equiv b \pmod{m}$ kongruencia megoldásszámát. Számítsuk ki a $\sum_{b=1}^{m} f(b)$ összeget.

7. Mutassuk meg, hogy végtelen sok olyan háromtagú számtani sorozat létezik, amelynek tagjai relatív prímek és mindhárom elem négyzetszám.

8.* Legyen p egy 4-nél nagyobb egész szám. Bizonyítsuk be, hogy p akkor és csak akkor prímszám, ha p bármely négy pozitív egész összegére való felbontásában semelyik 2 tag szorzata sem egyenlő a másik két tag szorzatával.

9.* Adjunk meg 2017 különböző egész számot, amihez a φ-függvény ugyanazt az értéket rendeli.