4. gyakorlat

1. **a)** Mi az utolsó számjegye $73^{73} + 37^{37}$-nek?

   b) Mi az utolsó 2 darab számjegye az előbbi számnak?

2. Bizonyítsuk be, hogy ha $11 \mid a^{100} + b^{100} + c^{100}$, akkor $11^{100} \mid a^{100} + b^{100} + c^{100}$ is teljesül.

3. Mutassuk meg, hogy minden $n > 2$-re $\varphi(n)$ páros.

4. Igazoljuk, hogy ha p prím és $a^p \equiv b^p \pmod{p}$, akkor $a^p \equiv b^p \pmod{p^2}$.

5. Bizonyítsuk be, hogy 561 álprím, azaz nem prímszám, mégis teljesül rá a kis-Fermat tétel:

$$\forall a\text{-ra: } a^{561} \equiv a \pmod{561}.$$

   Keressünk további álprímeket.

6. Legyen p egy prímszám, $r_1, \ldots, r_p$ pedig egy teljes maradékrendszer modulo p. Igazoljuk, hogy $r_1^{2p-3}, \ldots, r_p^{2p-3}$ is teljes maradékrendszer modulo p.

7. **a)** Igazoljuk, hogy $n^2 + 1$ alakú szám minden páratlan osztója $4k + 1$ alakú.

   b) Mutassuk meg, hogy végtelen sok $4k + 1$ alakú prím van.

8. **a)** Igazoljuk, hogy ha n páros és előáll két négyzetszám összegeként, akkor $\frac{n}{2}$ is előáll két négyzetszám összegeként.

   b) Legyen $p = a^2 + b^2$ prím, ahol $a, b \in \mathbb{Z}$. Tegyük fel, hogy $p \mid n$ és n előáll két négyzetszám összegeként. Igazoljuk, hogy $\frac{n}{p}$ is előáll két négyzetszám összegeként.

   c)* Mely számok állnak elő két négyzetszám összegeként?

9.* Mely p prímekre lesz

$$\frac{2^{p-1} - 1}{p}$$

   négyzetszám?

10.* Igazoljuk, hogy minden k pozitív egészhez van olyan n, amelyre $\varphi(n) = \varphi(n + k)$.