3. gyakorlat

1. Határozzuk meg az Eukleidészi algoritmussal a 623 és 854 egész számok legnagyobb közös osztóját. Írjuk fel a közös osztót $623x+854y$ alakban, ahol x és y egész számok.

2. *a*) Hány olyan u, v egész számpár van, amelyre $(a, b) = au + bv$?

   b) Az $(a, b) = au+bv$ előállításban mi u és v legnagyobb közös osztója?

3. *a*) Definiáljuk az oszthatóságot az $S = \{a + b\sqrt{5} : \ a, b \in \mathbb{Z}\}$ számkörben. Mutassunk egy elemet S-ben, amely felbonthatatlan, de nem prímszám.

   b)* Az $S' = \{a + b\frac{1+\sqrt{5}}{2} : \ a, b \in \mathbb{Z}\}$ számkörben viszont igaz a számelmélet alaptétele: ugyanazok a felbonthatatlanok, mint a prímek.

4. Legyenek a és b különböző pozitív egészek. Melyek igazak az alábbi állítások közül?

   a) Végtelen sok n egészre $(a + n, b + n) = 1$.

   b) Végtelen sok n egészre $(a + n, b + n) = (b + n, bn) = 1$.

   c) Végtelen sok n egészre $(a + n, bn) = (b + n, bn) = 1$.

5. Tekintsük a véges tizedestörtek V halmazát.

   a) Határozzuk meg az egységeket és a felbonthatatlanokat.

   b) Bizonyítsuk be, hogy V-ben érvényes a számelmélet alaptétele.

6. Mutassuk meg, hogy $n > 0$, $k > 0$, $a > 1$ egészek esetén
$$(a^n - 1, a^k - 1) = a^{(n,k)} - 1 \ .$$

7. Igazoljuk, hogy ha az n pozitív egész szám nem 3^k alakú, akkor a következő szám összetett:
$$1 + 2^n + 4^n.$$

8.* Bizonyítsuk be, hogy ha n természetes szám, akkor
$$\left(5 + \sqrt{26}\right)^n$$
tizedestört alakjában a tizedesvesszőt követő első n jegy egyenlő.

9.* Legyen f_n a Fibonacci sorozat n-edik tagja (azaz $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, és $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ ha $n \geq 1$). Igazoljuk, hogy $f_k \mid f_n$ akkor és csak akkor, ha $k \mid n$ vagy $k = 2$. Továbbá $f_{(n,k)} = (f_n, f_k)$.