

2. gyakorlat

1. Mely p egész számokra lehet p , $p + 2$ és $p + 4$ egyszerre prím?
2. Oldjuk meg a prímszámok körében a

$$p^2 - 2q^2 = 1$$

egyenletet.

3. Halhatatlan kapitánynak három halhatatlan unokája van, akiknek az életkora három különböző prímszám, és ezek négyzetösszege is prímszám. Hány éves a kapitány legkisebb unokája?
4. Adjunk meg végtelen sok olyan n -et, amelyre $29 \mid 2^n + 5^n$.
5. Tekintsük oszthatósági szempontból az $S = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ számkört az egész számok helyett. Hogy érdemes definiálni a norma és konjugált fogalmát? Igazoljuk a következőket:
 - (a) $\overline{\alpha \cdot \beta} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}$;
 - (b) $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$;
 - (c) $\alpha \mid \beta$ akkor és csak akkor, ha $\overline{\alpha} \mid \overline{\beta}$;
 - (d) Ha $\alpha \mid \beta$, akkor $N(\alpha) \mid N(\beta)$ az egészek között ;
 - (e) ε egység S -ben akkor és csak akkor, ha $N(\varepsilon) = \pm 1$.
 - (f) Végtelen sok egység van S -ben.
 - (g)* Határozzuk meg az összes egységet S -ben.
 - (h)* Igazoljuk a számelmélet alaptételét S -ben.
6. Igazoljuk, hogy végtelen sok $a) 4k + 3$, $b) 6k + 5$ alakú prím van.
7. Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan nemkonstans egész együtthatós $f(x)$ polinom, amely az x változó minden egész értékére prímet vesz fel.
- 8* Adjuk meg az összes olyan pozitív prímszámot, aminek alkalmas (pozitív egész kitevős) hatványa felírható két pozitív egész szám köbének az összegeként.
- 9* Bizonyítsuk be hogy $k\ell + 1$ darab pozitív egész szám közül mindig vagy kiválasztható $k + 1$ darab olyan, amelyek közül egyik sem osztója a másinak, vagy pedig $\ell + 1$ darab olyan, amelyek sorbarakhatók úgy, hogy mindegyik szám osztója a következő számnak.