Bsc Lineáris és absztrakt algebra gyakorlat

Első zárthelyi dolgozat – megoldások (2024. március 26.)

1. A karakterisztikus polinom $k(x) = \det\begin{pmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 \\ 0 & 0 & 1-x \end{pmatrix} = (1-x)^3$ (1 pont), az egyetlen sajátérték az 1 (1 pont). Az 1-hez tartozó sajátaltér az $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ egyenletrendszer megoldásahalmaza (1 pont), azaz $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{C} \right\}$ (1 pont). A Cayley-Hamilton tétel szerint az $m(x)$ minimálpolinom osztja $k(x)$-et (1 pont), ezért $m(x) = x-1, (x-1)^2$, vagy $(x-1)^3$ (1 pont). Mivel $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$, a mátrix nem gyöke az $(x-1)^2$ polinomnak (1 pont). Tehát a minimálpolinom csak az $(x-1)^3$ lehet (1 pont). Speciálisan a Jordan-féle normálalakban az 1 sajátértékhez tartozó legnagyobb blokk mérete 3 (1 pont), így a Jordan-féle normálalak $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (1 pont). Megjegyzés: Az, hogy ez a Jordan-alak, úgy is indokolható, hogy mivel a sajátaltér 1-dimenziós, egyetlen Jordan-blokk van.

2. **a)** Válasz: pontosan akkor, ha $c = 2$ (1 pont). Egyrészt ha $c = 2$, akkor $1 + 3x + 2x^2 = (1 + x) + 2(x + x^2) \in \langle 1 + x, x + x^2 \rangle$ (1 pont). Másrészt ha $1 + 3x + cx^2 \in \langle 1 + x, x + x^2 \rangle$, akkor $(c-2)x^2 = (1+3x+cx^2) - (1+x) - 2(x+x^2) \in \langle 1+x, x+x^2 \rangle$ és ha $c \neq 2$, akkor $x^2 \in \langle 1+x, x+x^2 \rangle$ és így $x = (x + x^2) - x^2 \in \langle 1 + x, x + x^2 \rangle$, $1 = (1 + x) - x \in \langle 1 + x, x + x^2 \rangle$ (1 pont). Viszont $\dim\langle 1 + x, x + x^2 \rangle \leq 2$ (valójában $= 2$), hiszen két elem generálja, ezért nem lehet benne három lineárisan független elem (mégpedig $1, x, x^2$), ami ellentmondás (1 pont). Megjegyzés: az az indoklás is helyes, hogy $1 + 3x + cx^2 \in \langle 1 + x, x + x^2 \rangle$ pontosan akkor teljesül, ha az $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$ mátrix oszlopai lineárisan összefüggőek, azaz ha a determinánsa 0.

b) A minimálpolinom gyökei pontosan a sajátértékek (1 pont), ezért A sajátértékei $0, \pm 1$ (1 pont). Speciálisan a $-1/2$ *nem* sajátértéke A-nak (1 pont), azaz $\det(A - (-1/2)I) \neq 0$ (2 pont), vagyis $\det(2A + I) = 2^n \det(A - (-1/2)I) \neq 0$, így $2A + I$ invertálható (1 pont).

3. Legyen $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Ekkor $k_A(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$ (1 pont) és mivel A nem skalármátrix, ezért A Jordan-féle normálalakja $B := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (1 pont). Most meghatározzuk az S áttérési mátrixot, melyre $B = S^{-1}AS$. Először is a 2-höz tartozó sajátvektor lesz S második oszlopa (1 pont), ehhez az $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$ egyenletrendszert kell megoldani (1 pont), melynek (egyik) nemnulla megoldása $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (1 pont). S első $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ oszlopvektorának pedig az $A\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ egyenletet kell teljesítenie (1 pont), melynek (egyik) megoldása $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (1 pont). Tehát $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, így

$S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ (1 pont). $B^{2024} = \begin{pmatrix} 2^{2024} & 0 \\ 2024 \cdot 2^{2023} & 2^{2024} \end{pmatrix}$ (1 pont), ezért $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{2024} = A^{2024} = SB^{2024}S^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{2024} - 2024 \cdot 2^{2023} & 2024 \cdot 2^{2023} \\ -2024 \cdot 2^{2023} & 2^{2024} + 2024 \cdot 2^{2023} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2022 \cdot 2^{2023} & 2024 \cdot 2^{2023} \\ -2024 \cdot 2^{2023} & 2026 \cdot 2^{2023} \end{pmatrix}$ (1 pont).

4. *Egyik irány:* Tegyük föl, hogy α algebrai. Ekkor $\overline{\alpha}$ is algebrai, hiszen ugyanannak a racionális együtthatós polinomnak gyöke (1 pont). Mivel az algebrai számok testet alkotnak, ezért $\frac{\alpha+\overline{\alpha}}{2} = \mathrm{Re}(\alpha)$ (1 pont) és $\alpha\overline{\alpha} = |\alpha|^2$ is algebrai (1 pont). Ha $|\alpha|^2$ gyöke az $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ nemkonstans polinomnak, akkor $|\alpha|$ gyöke $f(x^2)$-nek (1 pont), így $|\alpha|$ is algebrai (1 pont).

Másik irány: Tegyük föl, hogy $\mathrm{Re}(\alpha)$ és $|\alpha|$ algebrai. Mivel az algebrai számok testet alkotnak, $\mathrm{Re}(\alpha)^2$ (1 pont) és $|\alpha|^2$ is algebrai (1 pont), ezért $\mathrm{Im}(\alpha)^2 = |\alpha|^2 - \mathrm{Re}(\alpha)^2$ is (1 pont). Ha $\mathrm{Im}(\alpha)^2$ gyöke a $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ nemkonstans polinomnak, akkor $\mathrm{Im}(\alpha)$ gyöke $g(x^2)$-nek, azaz algebrai (1 pont). Ekkor viszont $\alpha = \mathrm{Re}(\alpha) + i\mathrm{Im}(\alpha)$ is algebrai, mert i is az, hiszen gyöke az x^2+1 polinomnak (1 pont).

5. *Első megoldás:* Vegyünk egy $a_1, \ldots, a_k$ bázist $U_1 \cap U_2$-ben, majd ezt egészítsük ki $b_1, \ldots, b_r$ vektorokkal U_1 bázisává, illetve $c_1, \ldots, c_r$ vektorokkal U_2 bázisává (mivel $\dim U_1 = \dim U_2$, ezért ugyanannyi vektorral egészítjük ki) (1 pont). Tanultuk előadáson, hogy ekkor $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_r, c_1, \ldots, c_r$ bázis U_1+U_2-ben (1 pont), ezt pedig kiegészíthetjük $d_1, \ldots, d_s$ vektorokkal V bázisává (1 pont). Itt $k, r, s \geq 0$, azaz bármelyik lehet 0 is. Azt állítom, hogy $W := \langle d_1, \ldots, d_s, b_1 + c_1, \ldots, b_r + c_r \rangle$ megfelel (1 pont). Egyrészt $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_r \in U_1 \subseteq U_1 + W$, $d_1, \ldots, d_s \in W \subseteq U_1 + W$ és $c_j = -b_j + (b_j + c_j) \in U_1 + W$ $(j = 1, \ldots, r)$, azaz U_1+W tartalmazza V egy bázisát, így $U_1+W = V$ (2 pont). Másrészt $\dim W \leq s+r$ (van ekkora generátorrendszere) és $\dim U_1 = k+r$, $k+2r+s = \dim V = \dim U_1 + \dim W - \dim U_1 \cap W \leq (k+r) + (s+r) - \dim(U_1 \cap W)$ (1 pont). Tehát szükségképpen egyenlőség van és $\dim(U_1 \cap W) = 0$ (1 pont), speciálisan az $U_1 + W$ összeg direkt összeg, azaz $V = U_1 \oplus W$ (1 pont). Szimmetria miatt hasonlóan következik az is, hogy $V = U_2 \oplus W$ (1 pont).

Második megoldás: Az első megoldáshoz hasonlóan szeretnénk találni V-ben $s := \dim V - \dim U_1 = \dim V - \dim U_2$ darab $d_1, \ldots, d_s \in V$ vektort, melyekkel akár U_1, akár U_2 egy – tetszőleges – bázisát kiegészítve V bázisát kapjuk. Az ilyen vektorrendszer létezését s szerinti indukcióval igazoljuk. Ha $s = 0$, akkor $U_1 = V = U_2$, tehát az állítás világos. Továbbá ha $U_1 = U_2$, akkor az állítás volt előadáson: U_1 egy tetszőleges bázisát kiegészíthetjük V bázisává. Végül ha $U_1 \neq U_2$, akkor $U_1 \not\subseteq U_2$ és $U_2 \not\subseteq U_1$, hiszen dimenziójuk megegyezik. Viszont ekkor $U_1 \cup U_2$ nem altér V-ben (1. feladatsor 18-as feladat), speciálisan $U_1 \cup U_2 \neq V$, azaz van olyan $d_1 \in V$ vektor, melyre $d_1 \notin U_1$ és $d_1 \notin U_2$. Legyen $U_1' := \langle U_1, d_1 \rangle$ és $U_2' := \langle U_2, d_1 \rangle$. Mivel $\dim V - \dim U_1' = s - 1 = \dim V - \dim U_2'$, ezért az indukciós feltevés szerint találhatunk $d_2, \ldots, d_s$ vektorokat, melyekkel akár U_1', akár U_2' bázisát kiegészítve V egy bázisát kapjuk. Az így kapott $d_1, \ldots, d_s$ vektorok megfelelnek.

6. Mivel f és g nemkonstans, mindkettő legfeljebb hatodfokú (2 pont). Másrészt $0 = \sqrt[7]{2}^7 - 2 = f(\sqrt[7]{2})g(\sqrt[7]{2})$, azaz $f(\sqrt[7]{2})$ és $g(\sqrt[7]{2})$ közül legalább (valójában *pontosan*, de erre nincs szükség) az egyik 0. Speciálisan $\sqrt[7]{2}$ K fölötti $m(x)$ minimálpolinomjának a foka ≤ 6 (hiszen $m(x) \mid f(x)$ vagy $m(x) \mid g(x)$), azaz $|K(\sqrt[7]{2}) : K| = \deg m(x) \leq 6$ (2 pont) relatív prím a 7-hez (2 pont). Ugyanakkor $|\mathbb{Q}(\sqrt[7]{2}) : \mathbb{Q}| = 7$, hiszen $x^7 - 2$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött (Schönemann–Eisenstein) (2 pont). Tehát 7 osztója $|K(\sqrt[7]{2}) : \mathbb{Q}(\sqrt[7]{2})| \cdot |\mathbb{Q}(\sqrt[7]{2}) : \mathbb{Q}| = |K(\sqrt[7]{2}) : \mathbb{Q}| = |K(\sqrt[7]{2}) : K| \cdot |K : \mathbb{Q}|$-nak, így $|K : \mathbb{Q}|$-nak is, hiszen $|K(\sqrt[7]{2}) : K|$-hez relatív prím (2 pont).

7. A megoldás nagyon hasonló ahhoz, ahogy a minimálpolinom gyöktényezős felbontásának segítségével felbontjuk a teret direkt összegre. Először vegyük észre, hogy $A_i = A_i I = A_i(A_1 + \cdots + A_k) = A_i^2$, hiszen $A_i A_j = 0$, ha $j \neq i$ (2 pont). Most belátjuk, hogy $\mathbb{C}^n = \mathrm{Im}(A_1) + \cdots + \mathrm{Im}(A_k)$. Vegyünk ugyanis egy tetszőleges $v \in \mathbb{C}^n$ vektort és legyen $v_i = A_i v$ $(i = 1, \ldots, k)$. Ekkor $v_i \in \mathrm{Im}(A_i)$ és $v = Iv = (A_1 + \cdots + A_k)v = v_1 + \cdots + v_k$ (4 pont). Másrészt tegyük fel, hogy $v_1 + \cdots + v_k = v_1' + \cdots + v_k'$ valamely $v_i = A_i w_i, v_i' = A_i w_i' \in \mathrm{Im}(A_i)$ $(i = 1, \ldots, k)$ vektorokra. Ekkor

$$v_i = A_i w_i = A_i^2 w_i = A_i(A_1 w_1 + \cdots + A_k w_k) = A_i(A_1 w_1' + \cdots + A_k w_k') = A_i^2 w_i' = A_i w_i' = v_i'$$

minden $i = 1, \ldots, k$-ra, azaz az összeg direkt (4 pont).