Bsc Lineáris és absztrakt algebra intenzív gyakorlat
Hetedik feladatsor

1. Adjuk meg a síkon a tükrözések, forgatások, merőleges vetítések adjungáltját. Melyek lesznek szimmetrikusak, illetve ortogonálisak?

2. A $\mathbb{C}^4$ alábbi transzformációi közül melyek normálisak, önadjungáltak, unitérek?

$$A\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix},\quad B\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_4\\u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix},\quad C\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_1\\u_1\\u_1\\u_1\end{bmatrix},$$

$$D\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_1+u_2+u_3+u_4\\u_1+u_2+u_3+u_4\\u_1+u_2+u_3+u_4\\u_1+u_2+u_3+u_4\end{bmatrix},\quad E\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_1-u_2\\u_2-u_3\\u_3-u_4\\u_4-u_1\end{bmatrix}.$$

3. ***(Kötelezően beadandó HF)*** Tekintsük $\mathbb{R}^4$-en az előző feladat B és D transzformációit, valamint az alábbiakat:

$$F\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_4\\u_3\\u_2\\u_1\end{bmatrix},\quad G\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(u_1-u_2+u_3-u_4)/2\\(u_1-u_2-u_3+u_4)/2\\(u_1+u_2+u_3+u_4)/2\\(u_1+u_2-u_3-u_4)/2\end{bmatrix},\quad H\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_1+u_2\\u_1-u_2\\u_3+u_4\\u_3-u_4\end{bmatrix}.$$

Melyek szimmetrikusak, illetve ortogonálisak? A szimmetrikusakhoz adjunk meg ortonormált sajátbázist, az ortogonálisakhoz pedig olyan bázist, amelyben a mátrixra az előadáson szerepelt tételnek megfelelő, forgatásokat és ±1-et tartalmazó blokkokra bomlik.

4. Bizonyítsuk be az alábbiakat.

(1) Ha $Av=\lambda v$ és $A^*w=\mu w$, akkor $\overline{\lambda}=\mu$ vagy $v\perp w$.
(2) $\operatorname{Ker} A^*=(\operatorname{Im} A)^\perp$ és $\operatorname{Im} A^*=(\operatorname{Ker} A)^\perp$.
(3) $AA^*=0 \implies A=0$.
(4) $A^*B=0 \implies \operatorname{Im}(A)+\operatorname{Im}(B)=\operatorname{Im} A\oplus\operatorname{Im} B$.
(5) $A^*B=BA^*=0 \implies \operatorname{Im}(A+B)=\operatorname{Im} A\oplus\operatorname{Im} B$.

5. Igazoljuk, hogy ha A és B önadjungált, akkor AB pontosan akkor önadjungált, ha $AB=BA$.

6. Mutassuk meg, hogy egy normális transzformáció sajátalterei páronként merőlegesek. Igaz-e a megfordítás?

7. Igaz-e, hogy ha két normális transzformáció felcserélhető, akkor megegyeznek a sajátvektoraik? Igaz-e a megfordítás?

8. Mutassuk meg, hogy az A transzformáció akkor és csak akkor normális, ha tetszőleges v vektorra $\|Av\|=\|A^*v\|$ teljesül.

9. Mutassuk meg, hogy egy transzformáció akkor és csak akkor merőlegességtartó, ha egy unitér (illetve ortogonális) transzformáció skalárszorosa.

10. Bizonyítsuk be, hogy ha A ortogonális és szimmetrikus, akkor A^2 az identitás. Megfordítható-e ez az állítás?

11. Igazoljuk, hogy A akkor és csak akkor normális, ha A^* polinomja A-nak.

12. Határozzuk meg a valós euklideszi síkon az összes normális transzformációt.

13. Igazoljuk, hogy minden $\mathbb{C}$ feletti lineáris transzformáció felírható egy unitér és egy önadjungált transzformáció szorzataként, és hogy egy transzformáció pontosan akkor normális, ha felírható egy unitér és egy önadjungált transzformáció szorzataként, melyek felcserélhetők.

---

14. Transzformáljuk négyzetösszeggé **ortonormált bázisban** a $-x^2 + 10xy - y^2 - z^2$ és $-3x\overline{x} + 4ix\overline{y} - 4i\overline{x}y + 3y\overline{y} - z\overline{z}$ kvadratikus alakokat. További gyakorlásként transzformáljuk négyzetösszeggé **ortonormált bázisban** a 6. feladatsor 10-es feladatában szereplő kvadratikus alakokat is. Döntsük el, hogy az $x^2+xy = 1$ egyenletű síkgörbe ellipszis vagy hiperbola és határozzuk meg a szimmetriatengelyeit!

15. ***(Kötelezően beadandó HF)*** Döntsük el, hogy az $x^2 + xy + y^2 = 1$, ill. az $x^2 + 4xy + y^2 = 3$ egyenletű síkgörbe ellipszis vagy hiperbola, és határozzuk meg a szimmetriatengelyeiket!

16. Legyen α egy pozitív definit, β pedig egy tetszőleges szimmetrikus bilineáris függvény egy véges dimenziós $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$ feletti vektortéren (utóbbi esetben másféllineárisak). Bizonyítsuk be, hogy alkalmas bázisban α is és β is diagonális. Szükséges-e feltenni, hogy α (vagy β) pozitív definit?

17. *(*)* Legyen $G \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ egy *véges* részcsoport. Igazoljuk, hogy van olyan bázisa $\mathbb{C}^n$-nek, melyben G minden eleme unitér mátrix. (Azaz: igazoljuk, hogy van olyan $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ áttérési mátrix, melyre $S^{-1}gS$ unitér minden $g \in G$-re.) Az állítás akkor is igaz, ha G-ről a végesség helyett azt tesszük fel, hogy *kompakt* (azaz G korlátos és zárt, mint $\mathbb{C}^{n\times n} \cong \mathbb{R}^{2n^2}$ részhalmaza), de ehhez kell az ún. Haar-mérték (lásd következő feladat).

18. *(**)* Jelölje S^1 az 1 abszolútértékű komplex számok csoportját a szorzásra nézve és tegyük fel, hogy $\varphi\colon S^1 \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ egy csoporthomomorfizmus és φ folytonos. Igazoljuk, hogy van olyan bázisa $\mathbb{C}^n$-nek, melyben $\mathrm{Im}(\varphi)$ minden eleme unitér mátrix. (Mivel S^1 kompakt, a folytonosság azzal ekvivalens, hogy φ egyenletesen folytonos, azaz minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, melyre $g, h \in S^1$ és $|g - h| < \delta$ esetén $\|\varphi(g) - \varphi(h)\|_\infty < \varepsilon$. Itt $|g - h|$ alatt a szokásos komplex szám abszolútértékét értjük, ha pedig $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, akkor $\|A\|_\infty$ a legnagyobb abszolútértékű elem abszolútértékét jelöli. Valójában a folytonosság definíciójában mindegy, hogy melyik mátrixnormát és melyik távolságfogalmat használjuk S^1-en, ekvivalensek.)

19. *(*)* Legyen $G \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ egy *véges kommutatív* részcsoport. Igazoljuk, hogy van olyan bázisa $\mathbb{C}^n$-nek, melyben G minden eleme diagonális.

20. *(*)* Igaz-e, hogy ha két $\mathbb{R}^{n\times n}$-beli mátrix $\mathbb{C}$ fölött hasonló, akkor $\mathbb{R}$ fölött is?