Bsc Lineáris és absztrakt algebra intenzív gyakorlat
Hatodik feladatsor

1. Igazoljuk valós euklideszi térben az alábbi állításokat. Mely közismert geometriai tételek általánosításai? Melyek igazak komplex felett is? (1) $x \perp z \iff \|x+z\|^2 = \|x\|^2 + \|z\|^2$. (2) $\|x\| = \|z\| \iff x+z \perp x-z$. (3) $\|x+z\|^2 + \|x-z\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|z\|^2$.

2. Mennyi $a+2b+3c+4d$ maximuma, ha $a^2+b^2+c^2+d^2=1$?

3. Legyen W a térben az $x+y-z=0$ egyenletű sík. Adjunk meg W-ben a Gram–Schmidt-eljárással egy ortonormált bázist, és ezt egészítsük ki a tér egy ortonormált bázisává.

4. Álljon a $W \leq \mathbb{R}^4$ altér azokból a vektorokból, melyek koordinátaösszege nulla. Határozzuk meg az $(1,2,3,4)$ pont távolságát ettől a „hipersík”-tól.

5. ***(Kötelezően beadandó HF)*** Legyen $U \leq \mathbb{R}^4$ azon vektorok halmaza, melyekben az első két koordináta összege egyenlő az utolsó két koordináta összegével. Adjunk meg U-ban egy ONB-t, határozzuk meg $U^\perp$ elemeit, végül írjuk fel az $(1,0,0,0)$ vektort egy U-beli és egy $U^\perp$-beli vektor összegeként.

6. Igazoljuk, hogy ha b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 ONB, akkor $\langle b_1, b_2, b_3\rangle^\perp = \langle b_4, b_5\rangle$.

7. Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis egy euklideszi térben. Bizonyítsuk be, hogy pontosan egy olyan $c_1, \ldots, c_n$ bázis létezik, melyre $(b_i, c_j) = \delta_{ij}$.

8. ***(*)*** Legyen α_n, illetve β_n az a szög, amelyet az n-dimenziós egységkocka testátlója egy éllel, illetve egy ($n-1$-dimenziós) lappal bezár. Számítsuk ki α_4, β_4 és $\lim_{n\to\infty} \alpha_n$ értékét.

9. ***(*)*** Egy n-dimenziós valós euklideszi térben maximálisan hány olyan nem nulla vektor adható meg, melyek közül bármely kettő szöge α, ha $\alpha = 60°$, illetve ha $\alpha = 120°$?

---

10. Írjuk föl az alábbi kvadratikus alakok szimmetrikus mátrixát, hozzuk őket négyzetösszeg alakra, és határozzuk meg a karakterüket: x^2+y^2, x^2-y^2, xy, $x^2-2xy+y^2$, x^2-xy+y^2, $x^2-3xy+y^2$, x^2+xy, $-x^2+10xy-y^2-z^2$, $xy+yz$, $xy+yz+xz$, $-x^2+2xy+2xz$.

11. Négyzetösszeg alakú-e az $x^2+y^2+(x+y)^2 = (\sqrt{3}x)^2+(\sqrt{3}y)^2-(x-y)^2$ kvadratikus alak? Mi a karaktere (és az értékkészlete)? Miért nem mond ellent a tehetetlenségi tételnek?

12. Legyen Q kvadratikus alak egy valós feletti vektortéren, $e_1, \ldots, e_n$ egy Q-ortogonális bázis, és $U = \langle e_i \mid Q(e_i) > 0\rangle$, $V = \langle e_i \mid Q(e_i) \geq 0\rangle$, $W = \langle e_i \mid Q(e_i) = 0\rangle$. E három altér közül melyek függetlenek az $e_1, \ldots, e_n$ bázistól?

13. Mely valós szimmetrikus bilineáris függvényekre eleme minden nem nulla vektor egy ortogonális bázisnak?

14. Mely testek fölött diagonalizálható az $\beta(u,v) = x_1y_2 + x_2y_1$ szimmetrikus bilineáris függvény ($u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$)? A valós test esetében adjuk meg az összes ortogonális bázist.

15. Legyen β nem elfajuló bilineáris függvény egy V vektortéren. (Ez azt jelenti, hogy minden $v \neq 0$-hoz van w, hogy $\beta(v,w) \neq 0$, és olyan u is, hogy $\beta(u,v) \neq 0$.) Igaz-e, hogy tetszőleges $v_1, \ldots, v_n$ vektorok akkor és csak akkor lineárisan függetlenek, ha a $|((\beta(v_i, v_j)))|$ úgynevezett Gram-determináns nullától különböző?

16. ***(*)*** Legyen β szimmetrikus bilineáris függvény egy (véges dimenziós), K test fölötti V vektortéren, $U \leq V$ pedig egy tetszőleges altér. Igazoljuk az alábbiakat:

(1) $\dim U + \dim U^\perp \geq \dim V$ mindig, és ha β nem elfajuló, akkor egyenlőség áll fenn.
(2) $U \subseteq (U^\perp)^\perp$ és ha β nem elfajuló, akkor egyenlőség van.

17. *(*)* Legyen β egy bilineáris függvény. Bizonyítsuk be, hogy $u \perp_\beta v$ akkor és csak akkor szimmetrikus reláció, ha β szimmetrikus vagy alternáló. Mi a helyzet $\mathbb{C}$ fölött másfélineáris függvényekre?

18. *(*)* A $P_n(x)$ Legendre-polinomok a következőképpen vannak definiálva:

$$P_0(x) := 1, \quad P_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n\left((x^2-1)^n\right)}{dx^n} \quad (n \geq 1).$$

Igazoljuk, hogy $\mathbb{R}[x]$-ben ezek ortogonális rendszert alkotnak az $(f,g) := \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$ skaláris szorzatra. Bizonyítsuk be, hogy $P_n(1) = 1$ minden n-re, továbbá hogy $P_n(x)$-nek pontosan n különböző valós gyöke van, amelyek mind a $(-1,1)$ nyílt intervallumba esnek.

19. *(*)* Keressünk olyan skaláris szorzást az $\mathbb{R}[x]$ vektortéren, melyre a $T_n(\cos\alpha) = \cos n\alpha$ képlettel definiált Csebisev-polinomok ortogonális rendszert alkotnak.

20. *(**)* Adjunk meg olyan K testet, melyre $|K^\times : (K^\times)^2| = 4$ és olyat is, melyre $|K^\times : (K^\times)^2| = 8$.

---

21. Igazoljuk, hogy $b_1 = (1,1)/\sqrt{2}$ és $b_1 = (1,-1)/\sqrt{2}$ ONB $\mathbb{C}^2$-ben is. Adjuk meg ebben $(1,2)$ és $(1,i)$ koordinátáit, majd számítsuk ki a hosszukat a régi és az új koordinátákból is.

22. Tekintsük a $-3x\overline{x} + 4ix\overline{y} - 4i\overline{x}y + 3y\overline{y} - z\overline{z}$ kvadratikus alakot $\mathbb{C}$ felett. Írjuk fel a mátrixát, transzformáljuk négyzetösszeggé, végül határozzuk meg a karakterét.

23. Igazoljuk, hogy minden komplex bilineáris (másféllineáris) függvény egyértelműen írható $\beta_1 + i\beta_2$ alakban, ahol β_1 és β_2 Hermite-féle.