Bsc Lineáris és absztrakt algebra intenzív gyakorlat
Ötödik feladatsor

1. Igazoljuk, hogy ha egy csoportban minden elem rendje legfeljebb 2, akkor a csoport kommutatív.

2. Legyen $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ és definiáljuk a szorzást úgy, hogy $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k$, $ji = -k$, $jk = i$, $kj = -i$, $ki = j$, $ik = -j$ (és a -1-gyel való szorzás a nyilvánvaló). Mutassuk meg, hogy Q egy nemkommutatív nyolcelemű csoport (név: *kvaterniócsoport*), ami nem izomorf a D_4-gyel. Adjunk meg $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$-ben egy Q-val (kvaterniók) izomorf részcsoportot.

3. Legyen g egy n-edrendű elem a G csoportban. Mennyi g^k rendje? Hány n-edrendű elem van G-ben legalább?

4. Mennyi $|\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)|$? És $|\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_p)|$?

5. Milyen elemrendek fordulnak elő a $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ csoportban?

6. Mutassuk meg, hogy ha g és h relatív prím rendű egymással felcserélhető elemek egy csoportban, akkor $o(gh) = o(g)o(h)$. Elhagyható-e a két feltétel valamelyike?

7. Mik lehetnek $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$-ben egy p-edrendű elem sajátértékei?

8. Legyen G egy csoport, H_1 és H_2 részcsoportok G-ben. Adjunk szükséges és elégséges feltételt arra, hogy $H_1 \cup H_2$ is részcsoport legyen G-ben.

9. Van-e A_4-ben 6-odrendű részcsoport?

10. Legyen G csoport és $H \leq K \leq G$ részcsoportok. Igazoljuk, hogy $|G\colon H|$ pontosan akkor véges, ha $|G\colon K|$ és $|K\colon H|$ is véges, és ilyenkor $|G\colon H| = |G\colon K| \cdot |K\colon H|$.

11. Mutassuk meg, hogy egy csoportban két véges indexű részcsoport metszete is véges indexű.

12. Határozzuk meg a sík egybevágósági transzformációiból álló véges csoportokat.

---

13. Keressük meg azt a részcsoportot S_4-ben, amelyet a Cayley-tétel bizonyítása a Klein-csoporthoz, illetve a Z_4 csoporthoz rendel. Keressük meg S_6 azon részcsoportját is, melyet a Cayley-tétel bizonyítása D_3-hoz rendel.

14. Tekintsük a D_4 diédercsoportot, mint a sík egybevágósági transzformációinak részcsoportját. Adjuk meg a sík pontjainak orbitját és stabilizátorát.

15. Tegyük fel, hogy a G csoport hat az X halmazon és egy $x \in X$ elem stabilizátora H. Igazoljuk, hogy gx stabilizátora gHg^{-1} ($g \in G$ tetszőleges).

16. ***(Kötelezően beadandó HF az ápr. 8-12-ei héten (5+5 pont))*** *a*) Hány különböző nyakláncot tudunk készíteni 4 piros és 2 kék gyöngyből?
b) Egy négyzetet 9 kis egybevágó négyzetre osztunk (az oldalakkal párhuzamosan). Hányféleképpen lehet a 9 kis négyzet közül 4-et kiszínezni (egy színnel) úgy, hogy a nagy négyzet szimmetriáival egymásbavihető színezéseket nem tekintjük különbözőnek?

17. Legyenek A és B részcsoportok a G csoportban és legyen $X = G/B$ a B szerinti baloldali mellékosztályok halmaza. Tekintsük A hatását X-en a balszorzással (azaz egy $a \in A$ elem a gB mellékosztályt az agB mellékosztályba viszi). Mi B pályája és stabilizátora ennél a hatásnál? Igazoljuk, hogy $|AB| = |A||B|/|A \cap B|$.

---

18. Igazoljuk, hogy ha egy $H \leq G$ részcsoport indexe 2, akkor H normálosztó G-ben.

19. Legyen $N \lhd G$ és $g \in G$. Igazoljuk, hogy gN rendje G/N-ben az a legkisebb pozitív egész n, melyre $g^n \in N$ (illetve végtelen, ha nincs ilyen n).

20. Legyen $n > 1$ egész. Mutassuk meg, hogy egy csoportban az n rendű elemek által generált részcsoport mindig normálosztó.

21. Adjunk példát arra, hogy ha $H_1, H_2 \leq G$ részcsoportok, akkor a H_1H_2 komplexusszorzat nem feltétlenül részcsoport.

22. Legyen $H \leq G$ részcsoport és $N \lhd G$ normálosztó.

a) Igazoljuk, hogy $HN = NH$ részcsoport G-ben.

b) Mutassuk meg, hogy $H \cap N$ normálosztó H-ban és $HN/N \cong H/(H \cap N)$.

23. Legyen G csoport, $N \lhd G$ normálosztó. Bizonyítsuk be, hogy az N-et tartalmazó K részcsoport pontosan akkor normálosztó G-ben, ha a kanonikus homomorfizmusnál vett képe K/N normálosztó G/N-ben. Továbbá ekkor $G/K \cong (G/N)/(K/N)$.

24. Határozzuk meg az alábbi csoportok összes elemének centralizátorát és konjugáltosztályát: D_n, Q, S_4, S_5, A_4, A_5, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$. (Egy elem centralizátora alatt az összes vele felcserélhető elem részcsoportját értjük.)

25. *a*) Bizonyítsuk be, hogy $Z(S_n) = 1$, ha $n \geq 3$. Mi $Z(D_n)$? És $Z(Q)$? (Itt $Z(G)$ a G csoport *centrum*át jelöli, azaz azon elemeket, melyek minden más elemmel felcserélhetők.)

b) Mutassuk meg, hogy $Z(G) \lhd G$.

26. *(*)* Igazoljuk, hogy tetszőleges test multiplikatív csoportjának tetszőleges véges részcsoportja ciklikus.

27. *(*)* Bizonyítsuk be, hogy ha $2 \leq n < p$ és p prím, akkor $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$-ben nincs p^2 rendű elem.

28. *(*)* Bizonyítsuk be, hogy ha G egy végtelen Abel csoport, melyben minden valódi részcsoport véges, akkor $G \cong Z_{p^\infty}$ valamilyen p prímszámra, ahol Z_{p^∞} a p-hatványrendű komplex egységgyökök csoportja.

29. *(*)* Igazoljuk, hogy egy véges G csoport rendje pontosan akkor páros, ha G-ben van másodrendű elem.

30. *(*)* Legyen G véges csoport, $H \leq G$ részcsoport. Igazoljuk, hogy G-ben van olyan H szerinti bal oldali reprezentánsrendszer, ami egyben jobboldali reprezentánsrendszer is.

31. *(**)* Igazoljuk, hogy minden véges csoport egy alkalmas véges, irányítatlan (többszörös- és hurokél nélküli) gráf szimmetriacsoportja.