**Bsc Lineáris és absztrakt algebra intenzív gyakorlat**

*Negyedik feladatsor*

**1.** *a)* Konstruáljunk 8, illetve 27 elemű testet.
*b)* Adjunk meg egy izomorfizmust $\mathbb{F}_3[x]/(x^2+1)$ és $\mathbb{F}_3[y]/(y^2-y-1)$ között.

---

**2.** ***(Kötelezően beadandó HF a márc. 11-15-ei héten)*** Van-e olyan mátrix, amelynek a karakterisztikus polinomja $x^4-x^2$ és a minimálpolinomja $(a)$ $x^2-x$; $(b)$ $x^3-x$; $(c)$ $x^4-x^2$? Amelyik létezik, arra adjunk is példát.

**3.** Határozzuk meg a 2. feladatsor 17. feladatában szereplő mátrixok és transzformációk; egy általános diagonális mátrix; valamint az alábbi mátrixok minimálpolinomját, rangját és Jordan-alakját. Az utolsó sor mátrixai közül melyek hasonlók?

$$\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}2&0&0\\1&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}2&0&0&0\\1&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}2&0&0&0\\1&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&1&2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&0&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&2&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}-3&-4&1\\6&9&-2\\15&24&-5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}2&0\\1&2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}2&0\\2&2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}3&0\\1&2\end{pmatrix}$$

**4.** Határozzuk meg az $\begin{pmatrix}1&2\\-2&5\end{pmatrix}$ mátrix Jordan-normálalakját, majd számítsuk ki a 2024-edik hatványát.

**5.** Mutassuk meg, hogy ha $J=\lambda I+N$ egy Jordan-blokk, és $f$ egy polinom, akkor $f(J)$-ben a főátló felett csupa nulla áll, és a főátlóval párhuzamos, a főátlótól lefelé számított $k$-adik „ferde sor” mindegyik eleme $f^{(k)}(\lambda)/k!$, ahol a ${}^{(k)}$ kitevő $k$-adik deriváltat jelöl.

**6.** Jelölje $J_{\lambda,k}$ a $k\times k$-as, $\lambda$ sajátértékhez tartozó Jordan-blokkot.
*a)* Határozzuk meg $J_{\lambda,k}$ minimálpolinomját.
*b)* Hogyan határozható meg egy mátrix (transzformáció) Jordan-normálalakjából a minimálpolinom?
*c)* Igazoljuk, hogy egy (komplex elemű, négyzetes) mátrix minimálpolinomja pontosan akkor egyezik meg a karakterisztikus polinomjával, ha minden sajátértéke csak egy Jordan-blokkban fordul elő. Hány független sajátvektor tartozik ilyenkor egy-egy sajátértékhez?
*d)* Adjunk új bizonyítást a Cayley-Hamilton-tételre komplex elemű mátrixok esetén.

**7.** Igazoljuk, hogy ha $M$ invertálható mátrix, akkor $M^{-1}$ polinomja $M$-nek.

**8.** Tegyük föl, hogy egy $A\in\mathbb{Q}^{n\times n}$ mátrix összes sajátértéke racionális. Igazoljuk, hogy ha $A$ diagonalizálható $\mathbb{C}$ felett, akkor diagonalizálható $\mathbb{Q}$ felett is. Igaz-e, hogy $A$-nak létezik Jordan-alakja $\mathbb{Q}$ fölött?

**9.** Bizonyítsuk be, hogy algebrailag zárt test fölött minden négyzetes mátrix hasonló a transzponáltjához.

**10.** ***(Kötelezően beadandó a márc. 18-22-ei héten)*** Hányféle lehet egy $6\times 6$-os nilpotens mátrix Jordan-féle normálalakja?

**11.** ***(*)*** Éjfélkor a hétfejű sárkány megjelent a királylánynál, felírt egy $13\times 21$-es 8 rangú valós mátrixot, és a következőket mondta. „Minden reggel megváltoztathatod a mátrix egy elemét. Én minden éjjel eljövök, és én is megváltoztathatom a mátrix egy elemét. Ha a mátrix rangját hétté tudom tenni, akkor felfallak.” Érdemes-e a királylánynak algebrát tanulnia?

A sárkány a királylány húgához is bement. „Neked egy 8 rangú $8\times 8$-as $M$ mátrixot kell most felírnod. Minden reggel meg kell változtatnod a mátrix egy elemét (tehát $M$-et már holnap reggel is). Én minden éjjel eljövök, és én is megváltoztatom a mátrix egy elemét. Mindketten mindig kötelesek vagyunk egy-egy elemet ténylegesen meg is változtatni. Ha a mátrix rangját hétté tudom tenni, akkor felfallak.” A királylány húga életben maradt-e?

**12.** ***(*)*** Legyen $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{k\times k}$ és tekintsük az $n \times k$-as mátrixok $\mathbb{C}^{n\times k}$ vektorterén azt a lineáris transzformációt, ami egy $M \in \mathbb{C}^{n\times k}$ mátrixhoz az $AM - MB \in \mathbb{C}^{n\times k}$ mátrixot rendeli. Igazoljuk, hogy ez a lineáris transzformáció pontosan akkor bijektív, ha $A$-nak és $B$-nek nincs közös sajátértéke.

---

**13.** Egy $K[\lambda]^{n\times n}$-beli mátrixot $\lambda$-mátrixnak nevezünk. Egy $\lambda$-mátrix *elemi átalakításának* a következő lépések valamelyikét nevezzük:

($i$) Két sor (vagy oszlop) cseréje.
($ii$) Egy sorhoz (ill. oszlophoz) hozzáadjuk egy másik sor (ill. oszlop) polinomszorosát.
($iii$) Egy sort vagy oszlopot megszorzunk egy $0 \neq c \in K$ számmal.

Bizonyítsuk be, hogy minden $\lambda$-mátrix elemi átalakításokkal $\begin{pmatrix} f_1(\lambda) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f_n(\lambda) \end{pmatrix}$ diagonális alakra hozható, ahol $f_i(\lambda) \mid f_{i+1}(\lambda)$ $(i = 1, \dots, n-1)$ és minden $f_i$ főegyütthatója 1.

**14.** Jelölje egy $n \times n$-es $\lambda$-mátrix összes $k \times k$-as aldeterminánsának („minorjának”) legnagyobb közös osztóját $D_k(\lambda)$. (Tehát $D_1(\lambda)$ az összes elem legnagyobb közös osztója, $D_n(\lambda)$ a mátrix determinánsa.) Bizonyítsuk be, hogy ha két $\lambda$-mátrix ekvivalens (azaz elemi átalakításokkal egymásbavihető), akkor rájuk ugyanaz a $D_k(\lambda)$ adódik minden $1 \leq k \leq n$-re.

**15.** Bizonyítsuk be, hogy $D_{k-1}(\lambda) \mid D_k(\lambda)$ $(2 \leq k \leq n)$. A $d_k(\lambda) := \frac{D_k(\lambda)}{D_{k-1}(\lambda)}$ hányadosokat a mátrix *invariáns osztóinak* nevezzük.

**16.** Mit jelent az, ha $D_r(\lambda) \neq 0$, de $D_{r+1}(\lambda) = 0$?

**17.** Bizonyítsuk be, hogy az alábbi feltételek az $A$ és $B$ $\lambda$-mátrixokra ekvivalensek:

$a$) $A$ és $B$ ekvivalens
$b$) $A$-ra illetve $B$-re kiszámolva $D_k(\lambda)$-t, ugyanazt kapjuk
$c$) Léteznek olyan $P, Q$ $\lambda$-mátrixok, melyek determinánsa $\neq 0$ konstans, és $PAQ = B$.

Legyen $K$ algebrailag zárt. Az $A \in K^{n\times n}$ mátrixra készítsük el az $A - \lambda I$ $\lambda$-mátrixot, tekintsük annak $d_1(\lambda), \dots, d_r(\lambda)$ $(d_{r+1}(\lambda) = \dots = d_n(\lambda) = 0)$ invariáns osztóit és azok $d_i(\lambda) = (\lambda - \lambda_1^{(i)})^{n_1^{(i)}} \dots (\lambda - \lambda_{k_i}^{(i)})^{n_{k_i}^{(i)}}$ gyöktényezős felbontásait. A $(\lambda - \lambda_j^{(i)})^{n_j^{(i)}}$ polinomok összességét az $A$ mátrix *elemi osztóinak* nevezzük. (Tehát pl. ha az invariáns osztók $1$, $\lambda$, $\lambda^2(\lambda+1)$, $\lambda^2(\lambda+1)^2$, akkor az elemi osztók: $\lambda$, $\lambda^2$, $\lambda^2$, $\lambda+1$, $(\lambda+1)^2$.) Mutassuk meg, hogy az elemi osztók ekvivalencia erejéig meghatározzák a $\lambda$-mátrixot (ha még az $r$ rangot is ismerjük).

**18.** Legyen $K$ algebrailag zárt. Mutassuk meg, hogy az $A, B \in K^{n\times n}$ mátrixok akkor és csak akkor hasonlók, ha az $A - \lambda I$ és $B - \lambda I$ $\lambda$-mátrixok ekvivalensek.

**19.** A fentiekből állítsunk össze egy módszert egy $A \in K^{n\times n}$ mátrix Jordan-féle normálalakjának meghatározására.

**20.** Hogyan lehet az elemi osztók segítségével meghatározni a minimálpolinomot?

**21.** ***(**)*** Az 13.-17. feladatok megoldásában mit használtunk ki a $K[\lambda]$ gyűrűről? Igazoljuk, hogy minden véges Abel-csoport felbontható $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ alakú (azaz *ciklikus*) csoportok direkt szorzatára.