**Bsc Lineáris és absztrakt algebra intenzív gyakorlat**
*Harmadik feladatsor*

**1.** ***(Kötelezően beadandó HF)*** Legyen $f_0 = f_1 = 1$ és $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ minden $n \geq 2$-re. Igazoljuk, hogy $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$. Az $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix diagonalizálásával adjunk képletet az $n$-edik hatványára és így $f_n$-re.

**2.** Álljon $I$ azon $\mathbb{Q}[x]$-beli polinomokból, melyeknek gyöke a $\sqrt[3]{2}$. Mi ennek az ideálnak a generátoreleme?

**3.** Melyek azok a lineáris transzformációk a síkon, melyeknek minimálpolinomja elsőfokú? Melyek azok, amelyeknek a minimálpolinomja és a karakterisztikus polinomja különböző?

**4.** a) Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges $K$ test feletti polinom előáll egy alkalmas $K$ feletti vektortéren értelmezett lineáris transzformáció karakterisztikus polionomjaként.
b) Igaz-e az állítás karakterisztikus polinom helyett minimálpolinommal?
c) Igaz-e, hogy ha $f$ egy $k$-adfokú polinom, és $k \leq n$, akkor $f$ egy alkalmas $n \times n$-es mátrix minimálpolinomja?

**5.** Oldjuk meg $\mathbb{Q}^{2\times 2}$-ben az $X^4 = 2X$ egyenletet.

**6.** Legyen $V$ véges dimenziós, $A \in \mathrm{Hom}(V)$ és $0 \neq v \in V$. Jelölje továbbá $m_{A,v}$ azt a minimális fokú normált polinomot, melyre $m_{A,v}(A)v = 0$. Igazoljuk a következőket:
a) $A$ minimálpolinomja $m_A$ az összes $m_{A,v}$ legkisebb közös többszöröse, midőn $v$ befutja $V$-t.
b) $W = \langle v, Av, A^2v, \dots \rangle$ épp a $v$-t tartalmazó legszűkebb $A$-invariáns altér.
c) $\dim(W) = \deg(m_{A,v})$.
d) Ha $m_A$-nak van $k$-adfokú irreducibilis osztója, akkor $A$-nak van $k$-dimenziós invariánsaltere.
e) Egy lineáris transzformáció karakterisztikus polinomja akkor és csak akkor irreducibilis,ha a transzformációnak csak két invariáns altere van (a triviálisak).
Határozzuk meg az $m_{A,v}$ polinomot tetszőleges $v$ esetén, ha $A$ a síkon egy tengelyes tükrözés,egy forgatás, valamint ha $A$ a deriválás a polinomok vektorterén.

**7.** Legyen $A$ egy komplex elemű mátrix. Igaz-e, hogy ha *a)* $A^{2011} = I$; *b)* $A^{2011} = 0$, akkor $A$ diagonalizálható?

**8.** ***(*)*** Igazoljuk, hogy egy $\mathbb{Q}^{n\times n}$-beli mátrix minimálpolinomja ugyanaz $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{C}$ felett.

---

**9.** Mutassuk meg, hogy $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt[6]{2})$.

**10.** Határozzuk meg $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ minimálpolinomját $\mathbb{Q}$ felett. Mik lesznek $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ résztestei?

**11.** A $\pi + 3, 5\pi + 6, \pi + \sqrt{2}, \pi^2 + 2\pi + 2, \sqrt{\pi}$ számok közül melyek algebraiak? (Használjuk fel, hogy $\pi$ transzcendens.)

**12.** Legyen $L = K(\alpha, \beta)$, ahol $|K(\alpha) : K| = m$, $|K(\beta) : K| = n$ és $(m, n) = 1$. Igazoljuk, hogy $|K(\alpha, \beta) : K| = mn$. Elhagyható-e az a feltétel, hogy $(m, n) = 1$?

**13.** Legyen $a, b \in \mathbb{R}$. Igazoljuk, hogy $a + bi$ pontosan akkor algebrai, ha $a$ és $b$ mindkettő algebrai.

**14.** Igazoljuk, hogy $\mathbb{Q}$ egyetlen véges bővítése sem algebrailag zárt.

**15.** ***(*)*** Legyen $K \leq L$ egy testbővítés, és $\alpha, \beta \in L$ transzcendens elemek $K$ felett. Igazoljuk, hogy $\alpha$ pontosan akkor algebrai $K(\beta)$ felett, ha $\beta$ algebrai $K(\alpha)$ felett.

**16.** ***(**)*** Legyen $R$ egy integritási tartomány, és $K$ egy olyan részgyűrűje $R$-nek, ami test, és $\dim_K R < \infty$. Igazoljuk, hogy $R$ test.

**17.** Legyen $\alpha$ páratlan fokú elem egy $K$ test felett. Igazoljuk, hogy $K(\alpha) = K(\alpha^2)$.

**18.** Igazoljuk az alábbiakat: Az $a \in R$ elem által *generált balideál* $(a)_b = \{na + ra \mid r \in R, n \in \mathbb{Z}\}$, egységelemes gyűrűben $(a)_b = \{ra \mid r \in R\} = Ra$ (mivel leginkább egységelemes gyűrűkkel foglalkozunk, ezért az utóbbi jelölést fogjuk használni). Az $a \in R$ elem által *generált ideál* $(a) = \{na + ra + as + \sum_i r_i a s_i \mid r, s, r_i, s_i \in R, n \in \mathbb{Z}\}$, egységelemes gyűrűben: $(a) = \{\sum_i r_i a s_i \mid r_i, s_i \in R\}$.

**19.** Az $R$ gyűrű $I$ és $J$ ideáljai által generált ideál: $(I, J) = I + J = \{a + b \mid a \in I, b \in J\}$. Az $I$ és $J$ komplexusszorzata által generált ideál $IJ := \{\sum_i a_i b_i \mid a_i \in I, b_i \in J\}$.

**20.** Határozzuk meg $\mathbb{R}[x, y]/(x^2, xy, y^2)$ gyűrű ideáljait.

**21.** Igazoljuk, hogy $\mathbb{Q}[x]/(x^3 - 2) \cong \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$.

**22.** Mely $m > 0$ egészekre igaz, hogy a $\mathbb{Z}/(m)$ gyűrűben a nullosztók a nullával együtt ideált alkotnak?