Bsc Lineáris és absztrakt algebra intenzív gyakorlat
Második feladatsor

1. Egy tízdimenziós térben kiválasztunk három kilencdimenziós alteret. Mekkora lehet a metszetük dimenziója? Adjunk példát minden lehetséges értékre.

2. Az alábbi $\varphi\colon V_1 \to V_2$ leképezések közül melyek lineárisak? Ahol a válasz igenlő, ott adjuk meg a leképezés mátrixát a szokásos, illetve a megadott bázis(pár)ban. Mi lesz a képtér, ill. a magtér?

(1) V_1 és V_2 a sík $\mathbb{R}$ felett, φ egy eltolás; egy pont körüli forgatás; egy egyenesre (pontra) való tükrözés; egy egyenesre való vetítés. A mátrixot csak az origó körüli α szögű forgatás; az $y = x$ egyenesre való tükrözés; az erre az egyenesre való, függőleges vetítésre számítsuk ki, a szokásos, illetve a $b_1 = (1,1)^T$, $b_2 = (-1,1)^T$ bázisban.
(2) $V_1 = \mathbb{R}$ az $\mathbb{R}$ felett, $V_2 = \mathbb{C}$ a $\mathbb{C}$ felett, φ az $1 + i$ számmal való szorzás.
(3) $V_1 = V_2 = \mathbb{C}$ az $\mathbb{R}$ felett, φ az $1 + i$ számmal való szorzás.
(4) $V_1 = \mathbb{R}^n$, $V_2 = \mathbb{R}$ az $\mathbb{R}$ felett, $\varphi(v)$ a v komponenseinek az összege.
(5) $V_1 = V_2 = \mathbb{R}^{2\times 2}$ az $\mathbb{R}$ felett, φ a transzponálás (azaz a főátlóra való tükrözés).
(6) $V_1 = \mathbb{R}[x]$ legfeljebb harmadfokú elemei, $V_2 = \mathbb{C}$ az $\mathbb{R}$ felett, $\varphi(f) = f(i)$.
(7) $V_1 = V_2 = \mathbb{R}[x]$ legfeljebb n-edfokú elemei az $\mathbb{R}$ felett, $\varphi(f) = f'$ (derivált).

3. Legyen f lineáris leképezés V_1-ből V_2-be. Melyek igazak a következők közül?

(1) Ha $a_1, a_2, \dots, a_k \in V_1$ független, akkor $f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_k)$ is független.
(2) Ha $a_1, a_2, \dots, a_k$ generátorrendszere V_1-nek, akkor $f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_k)$ generátorrendszere V_2-nek.
(3) Ha $a_1, a_2, \dots, a_k$ generátorrendszere V_1-nek, akkor $f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_k)$ generátorrendszere $\mathrm{Im}(f)$-nek.
(4) Ha $f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_k)$ független, akkor $a_1, a_2, \dots, a_k$ is független.
(5) Ha $f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_k)$ generátorrendszere V_2-nek, akkor $a_1, a_2, \dots, a_k$ generátorrendszere V_1-nek.

4. Legyen $U, W \le V$ alterek egy vektortérben. Tekintsük a következő leképezést: $\varphi\colon U \oplus W \to V$, $\varphi(u, w) := u + w \in V$. (Itt $U \oplus W$ a *külső* direkt összeg.) Igazoljuk, hogy ez egy lineáris leképezés. Mi a magja és a képe? A lineáris leképezésekre vonatkozó dimenziótétel segítségével adjunk új bizonyítást az alterek összegének dimenziójára vonatkozó képletre.

5. Legyen φ a térben a z-tengely körüli 90 fokos forgatás, ami az x-tengelyt az y-tengelybe viszi, és ψ az a transzformáció, ami minden pontot tükröz a $(0,0,0)^T$ és $(1,1,1)^T$ pontokat összekötő egyenesre. Mi ezeknél az $(1,2,3)^T$ pont képe? Igaz-e, hogy $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$?

6. Álljon W a sík azon lineáris transzformációiból, amelyek az $(1,1)^T$ pontot nullába viszik. Igazoljuk, hogy ez altér (a sík lineáris transzoformációinak vektorterében), és határozzuk meg a dimenzióját.

7. Legyen W a V véges dimenziós vektortér tetszőleges altere. Bizonyítsuk be, hogy V-nek létezik olyan lineáris transzformációja, amelynek W a magtere, illetve a képtere.

8. Mely V vektorterekben van olyan $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, melyre $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi)$?

9. Legyen V véges dimenziós vektortér, $\varphi\colon V \to V$ pedig egy lineáris transzformáció. Ha $\mathrm{Im}(\varphi^2) = \mathrm{Im}(\varphi)$, következik-e ebből, hogy $\mathrm{Ker}(\varphi^2) = \mathrm{Ker}(\varphi)$? Igaz-e a megfordítás?

10. Mutassuk meg, hogy ha φ idempotens lineáris transzformáció a V vektortéren, azaz $\varphi^2 = \varphi$, akkor $\mathrm{Im}(\varphi) \oplus \mathrm{Ker}(\varphi) = V$. (Az ilyen lineáris transzformációkat projekcióknak is nevezik.) Igazoljuk, hogy a sík egy lineáris transzformációja akkor és csak akkor idempotens, ha nulla, az identitás, vagy egy origón átmenő egyenesre való (nem feltétlenül merőleges) vetítés.

11. Legyen V egy véges dimenziós vektortér és $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, V)$. Igazoljuk, hogy van olyan k egész, melyre $V = \mathrm{Im}(\varphi^k) \oplus \mathrm{Ker}(\varphi^k)$.

12. Egy φ lineáris transzformáció nilpotens, ha van olyan n pozitív egész, hogy $\varphi^n = 0$. Bizonyítsuk be, hogy ha az φ és ψ nilpotens, lineáris transzformációk felcserélhetők (azaz $\varphi\psi = \psi\varphi$), akkor $\varphi + \psi$ is nilpotens. Elhagyható-e a felcserélhetőség feltétele?

13. ***(*)*** Legyen M nilpotens $n \times n$-es mátrix. Bizonyítsuk be, hogy $M^n = 0$.

---

14. Ha egy lineáris transzformáció mátrixa egy adott bázisban M, mi lesz a mátrix akkor, ha mindegyik bázisvektort (csak az első bázisvektort) a kétszeresére növeljük? Mely lineáris transzformációknak lesz minden bázisban ugyanaz a mátrixa?

15. ***(Kötelezően beadandó HF)*** A φ transzformáció mátrixa a sík szokásos $((1,0)^T, (0,1)^T)$ bázisában $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Adjuk meg a bázistranszformáció képletét felhasználva φ mátrixát az $(1,1)^T$, $(1,2)^T$ bázisban, és a $b_1 = 1/\sqrt{2}(1,1)^T$, $b_2 = 1/\sqrt{2}(-1,1)^T$ bázisban is.

16. Igazoljuk, hogy egy $A \in K^{n\times k}$ mátrix, mint $A\colon K^k \to K^n$ lineáris leképezés rangja nem más, mint a képterének a dimenziója. Igazoljuk, hogy $\mathrm{rk}(BA) \le \min(\mathrm{rk}(A), \mathrm{rk}(B))$, ha a BA mátrixszorzás értelmes.

17. Határozzuk meg az alábbi lineáris transzformációk, illetve mátrixok sajátértékeit, sajátaltereit, karakterisztikus polinomját és minimálpolinomját.

a) Az alábbi mátrixok $\mathbb{R}$ illetve $\mathbb{C}$ felett:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

Melyek diagonalizálhatóak? Számítsuk ki az utolsó két mátrix n-edik hatványát.

b) A vektortér a sík $\mathbb{R}$ felett, a transzformáció pedig az $y = x$ egyenesre való tükrözés; az erre az egyenesre való, függőleges irányú vetítés; az origó körüli α szögű forgatás.

c) A transzformáció a deriválás az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb másodfokú elemeinek vektorterén.

18. Melyek igazak az alábbi állítások közül?

a) Ha λ sajátértéke A-nak, akkor λ^2 sajátértéke A^2-nek.

b) Ha λ^2 sajátértéke A^2-nek, akkor λ sajátértéke A-nak.

c) Ha 0 sajátértéke A^2-nek, akkor 0 sajátértéke A-nak.

19. Tegyük fel, hogy A egy olyan lineáris transzformáció egy n-dimenziós téren, melynek n különböző sajátértéke van. Igazoljuk, hogy A-nak pontosan 2^n invariáns altere van.

20. Mutassuk meg, hogy ha $AB = BA$, akkor $\mathrm{Im}(A)$ és $\mathrm{Ker}(A)$ B-invariáns altér. Elhagyható-e a felcserélhetőség feltétele?

21. Legyen V egy $\mathbb{C}$ feletti n-dimenziós vektortér, A pedig egy lineáris transzformáció V-n. Bizonyítsuk be, hogy V-nek minden $0 \le k \le n$-re van k-dimenziós A-invariáns altere.

22. φ egybevágósági transzformáció a térben, mely a P pontot helyben hagyja. Igazoljuk, hogy van olyan $Q \ne P$ pont, melyet φ vagy helyben hagy, vagy P-re tükröz.

23. ***(*)*** Mutassuk meg, hogy egy komplex elemű négyzetes mátrix akkor és csak akkor nilpotens, ha minden hatványának 0 a nyoma. Az első hány hatványra kell csak feltenni?

24. ***(*)*** Bizonyítsuk be, hogy ha M egy komplex elemű mátrix, akkor $n \to \infty$ esetén M^n akkor és csak akkor tart nullához, ha M minden sajátértékének az abszolút értéke 1-nél kisebb.

25. ***(*)*** Legyen V a valós függvények vektortere a pontonkénti műveletekre, és $r \in \mathbb{R}$ esetén $D_r \in \mathrm{Hom}(V, V)$ az a transzformáció, melyre $D_r(f)(x) = f(x + r) - f(x)$. Igazoljuk, hogy $D_rD_s = D_sD_r$. Mutassuk meg továbbá, hogy egy n-edfokú polinom nem állítható elő (legfeljebb) n darab periodikus függvény összegeként.