Bsc Lineáris és absztrakt algebra gyakorlat

Első feladatsor

Lineáris és absztrakt algebra (intenzív)

zabradi.web.elte.hu

Előadáskivonat, feladatsorok, követelmények:
`https://zabradi.web.elte.hu/lin_abszt_alg_24t.html`

Gyakorlati jegy. A két **évfolyamzárthelyit** legalább $\mathbf{20+20}$ pontosra kell megírni (minden feladat 10 pont, mindkét ZH-n 7 feladat lesz); ha ez nem sikerül, akkor a gyakorlatvezető engedélye esetén a félév végén javító zárthelyit lehet írni. A házi feladatokból szintén 20 pontot kell elérni legalább (mindegyik HF 5 pontos, minden héten lesz egy kötelezően beadandó). A csillagos feladatokat is be lehet adni, ezek is 5-5 pontot érnek, de a minimumfeltételbe nem számítanak bele. Részletek, időpontok a fenti honlapon.

1. Igazoljuk az alábbiakat.

(a) Ha egy vektorrendszerben szerepel a nullvektor, akkor az nem lehet független.
(b) $\{v\}$ akkor és csak akkor független, ha $v \neq 0$. Mikor lesz független $\{v, w\}$?
(c) Ha $\{v_1, v_2, v_3\}$ független, akkor $\{v_1 - 3v_2, v_2, v_3\}$ is független.

Általánosítsuk a (3) állítást. Ismerünk-e hasonlót egy determináns oszlopairól?

2. Lineárisan függetlenek-e az alábbi vektorrendszerek?

(1) Az $\mathbb{R}$ feletti $\mathbb{R}[x]$ vektortérben $\{1, x, x^2\}$, $\{x, 2x, x^2, x^3\}$, $\{1+x, 1+2x, 1+3x\}$, $\{1+x, 1+x^2, x+x^2\}$.
(2) Az $\mathbb{R}$ feletti $\mathbb{C}$ vektortérben tetszőleges három komplex szám.
(3) A $\mathbb{Q}$ feletti $\mathbb{R}$ vektortérben $\{\lg 2, \lg 3, \lg 6\}$, illetve $\{\lg 2, \lg 3, \lg 5\}$. Általánosítsunk!
(4) Az $\mathbb{R}$ feletti $\mathbb{R}[x]$ vektortérben véges sok páronként különböző fokú polinom. És végtelen sok?
(5) Az $\mathbb{R}$ feletti $\mathbb{R}[x]$ vektortérben $(x-a)(x-b)$, $(x-b)(x-c)$ és $(x-a)(x-c)$, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$ páronként különbözők.

3. Előáll-e a $\sqrt{3}$ az 1 és $\sqrt{2}$ számok racionális együtthatós lineáris kombinációjaként? Lineárisan függetlenek-e 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ és $\sqrt{6}$ a racionális számok teste fölött? Általánosítsunk!

4. Tegyük fel, hogy egy vektortér a, b, c, d vektoraira $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$ mindegyike összefüggő, de $\{a, b, c\}$ független. Határozzuk meg d-t.

5. ***(Kötelezően beadandó HF)*** Mely n-ekre igaz a következő állítás: ha $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ lineárisan függetlenek, akkor $v_1+v_2, v_2+v_3, \ldots, v_{n-1}+v_n, v_n+v_1$ is függetlenek. Mi a helyzet más alaptest esetén?

6. Legyen $V = \mathbb{C}$, $K = \mathbb{R}$ a szokásos műveletekkel, és definiáljuk a vektortérműveleteket az $u \oplus v = u + v - 1$ és $\lambda \odot v = \lambda v - \lambda + 1$ képletekkel. Ellenőrizzük, hogy vektorteret kaptunk. Hogyan lehetne ezt úgy megtenni, hogy nem számoljuk végig a nyolc axiómát?

7. Tegyük föl, hogy létezik az AB mátrixszorzat. Mely állítások igazak az alábbiak közül?

(1) AB oszlopvektorai az A oszlopvektorainak lineáris kombinációi.
(2) AB oszlopvektorai a B oszlopvektorainak lineáris kombinációi.
(3) AB sorvektorai a B sorvektorainak lineáris kombinációi.
(4) AB sorvektorai a B oszlopvektorainak lineáris kombinációi.

8. Legyen $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ tetszőleges adott mátrix. Döntsük el, melyek igazak az alábbi állítások közül (a megfelelő magasságú nullvektort 0 jelöli):

(1) Ha az A oszlopai lineárisan összefüggnek, akkor az $Ax = 0$ egyenletrendszernek van a 0-tól különböző (azaz *nem triviális*) megoldása.
(2) Ha az A sorai lineárisan összefüggnek, akkor az $Ax = 0$ egyenletrendszernek van nem triviális megoldása.

(3) Ha az A oszlopai lineárisan összefüggnek, akkor az $Ax = b$ egyenletrendszernek egynél több megoldása van.
(4) Ha az A oszlopai lineárisan összefüggnek, akkor az $Ax = b$ egyenletrendszernek nem lehet egyértelmű a megoldása.

9. ***(*)*** (a) Legyen $v \in \mathbb{Z}^n$ egy olyan egész számokból álló oszlopvektor, melynek elemei relatív prímek. Igazoljuk, hogy van olyan 1-determinánsú, egész számokból álló mátrix, melynek v az első oszlopa.
(b) Legyen most $n > 2$ és $v, w \in \mathbb{Z}^n$. Adjunk (nemtriviális) szükséges és elégséges feltételt arra, hogy létezzen 1-determinánsú, egészekből álló mátrix, melynek v és w az első két oszlopa.

---

10. Az alábbi állítások közül melyek igazak egy n-dimenziós V vektortérben?
(1) Ha F független is és generátorrendszer is, akkor F maximális független részhalmaz.
(2) Ha F maximális független, akkor generátorrendszer.
(3) Ha G minimális generátorrendszer, akkor független.
(4) Bármely két generátorrendszer egyenlő elemszámú.
(5) Bármely két minimális generátorrendszer egyenlő elemszámú.
(6) Ha F elemszáma n, és független, akkor generátorrendszer (bázis) is.
(7) Ha G elemszáma n, és generátorrendszer, akkor független (bázis) is.
(8) Bármely n elemű részhalmaz generátorrendszer.

11. Határozzuk meg az alábbi vektorterek dimenzióját.
(1) A komplex számok vektortere $\mathbb{R}$ fölött.
(2) A legfeljebb n-edfokú $\mathbb{C}$ fölötti polinomok $\mathbb{R}$ fölött. Mi általában az összefüggés egy vektortér $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ fölötti dimenziója között?
(3) Azon legfeljebb n-edfokú $\mathbb{Q}$ fölötti polinomok $\mathbb{Q}$ fölött, melyeknek 2 gyöke.
(4) Azon legfeljebb n-edfokú $\mathbb{Q}$ fölötti f polinomok $\mathbb{Q}$ fölött, melyekre $f(1) = f(2)$.
(5) A $K^{n\times n}$ (főátlóra) szimmetrikus mátrixai a K test fölött.
(6) Egy X halmaz páros elemszámú részhalmazai $\mathbb{F}_2$ fölött.

12. ***(*)*** A szultán gondolt $\mathbb{R}^{1001}$-ben egy bázist, amit Seherezádénak 1001 éjszaka alatt ki kell találnia, különben kivégzik. Éjszakánként egy általa választott vektorról megkérdezheti, hogy mik a koordinátái. Életben marad-e Seherezádé? Mi a helyzet akkor, ha mindig csak az első koordinátára kérdezhet rá, és a kegyelem feltétele az első bázisvektor kitalálása?

---

13. Altér-e a W halmaz a V vektortérben az alábbi esetekben?
- $V = K[x]$ a K test fölött és W (1) a legfeljebb tizedfokúak és a zéruspolinom; (2) a legalább tizedfokúak és a zéruspolinom; (3) a páros fokú polinomok és a zéruspolinom; (4) azok a polinomok, ahol minden tag foka páros.
- $V = \mathbb{R}^{3\times 3}$ az $\mathbb{R}$ fölött, W azok a mátrixok, melyeknek (5) minden eleme racionális; (6) determinánsa nulla; (7) van két azonos eleme; (8) az első sor első két eleme azonos; (9) az elemek összege nulla; (10) az elemek szorzata nulla; (11) az elemek összege 3; (12) az elemek négyzetösszege 0.

(13) V a komplex számok vektortere $\mathbb{R}$ illetve $\mathbb{C}$ fölött, és $W = \{z \mid \mathrm{Re}(z) = 0\}$.
(14) V a sík $\mathbb{R}$ fölött, W pedig az első és harmadik síknegyed uniója. Adjuk meg ebben a vektortérben az összes alteret.

14. Ha egy V vektortér vektoraira $a \notin \langle b, c\rangle$, $b \notin \langle a, c\rangle$ és $c \in \langle a, b\rangle$, akkor mi a c?

15. Mi az üres halmazt tartalmazó legszűkebb altér? Mutassuk meg, hogy egy 1 elemmel generált altérnek legfeljebb két altere lehet.

16. Mikor lesz egy $\mathbb{R}$ feletti vektortérnek véges sok altere? Mi a helyzet más testek fölött?

17. Igazoljuk, hogy minden vektortérben $0 \cdot v = \lambda \cdot 0 = 0$ és $\lambda(-v) = (-\lambda)v = -\lambda v$.

18. Legyen V vektortér a K test fölött. Mikor lesz két altér uniója is altér?

19. ***(*)*** Hány k-dimenziós altere van az $\mathbb{F}_p$ feletti n-dimenziós oszlopvektorok terének?