Bsc Lineáris és absztrakt algebra gyakorlat

Első zárthelyi dolgozat (2024. március 26.)

Mindegyik feladat 10 pontot ér. Az elégségeshez legalább 20 pontot kell szerezni. Egy darab, kézzel írott $A4$-es lapot szabad használni, más segédeszközt (pl. kalkulátort, mobiltelefont) nem. Minden feladat **új oldalon** kezdődjön. Kérjük, hogy a **szerző nevét és NEPTUN-kódját, valamint a gyakorlatvezető nevét minden lapra** OLVASHATÓ nyomtatott betűkkel írják fel.

1. Határozzuk meg a $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ mátrix karakterisztikus polinomját, sajátértékeit, sajátaltereit, minimálpolinomját, Jordan-féle normálalakját.

2. $(4 + 6$ pont$)$

- **a)** Mely $c \in \mathbb{R}$ valós számra lesz benne $1 + 3x + cx^2$ az $\langle 1 + x, x + x^2 \rangle$ generált altérben (a vektortér $\mathbb{R}[x]$)?
- **b)** Legyen $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ egy olyan mátrix, melynek minimálpolinomja $m_A(x) = x^3 - x$. Mutassuk meg, hogy $2A + I$ invertálható.

3. Számítsuk ki az $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{2024}$ mátrixot (adjuk meg mind a négy elemét zárt alakban).

4. Bizonyítsuk be, hogy egy $\alpha \in \mathbb{C}$ komplex szám pontosan akkor algebrai ($\mathbb{Q}$ fölött), ha $\mathrm{Re}(\alpha)$ és $|\alpha|$ algebrai.

5. Legyen V egy végesdimenziós vektortér $\mathbb{R}$ fölött és $U_1, U_2 \leq V$ alterek, melyekre $\dim U_1 = \dim U_2$. Igazoljuk, hogy van olyan $W \leq V$ altér, melyre $U_1 \oplus W = U_2 \oplus W = V$.

6. Tegyük fel, hogy $\mathbb{Q} \leq K$ egy olyan test, melyre $|K : \mathbb{Q}|$ véges és $x^7 - 2 = f(x)g(x)$ valamely $f, g \in K[x]$ nemkonstans polinomokra. Mutassuk meg, hogy $|K : \mathbb{Q}|$ osztható 7-tel.

7. Legyen $A_1, \ldots, A_k \in \mathbb{C}^{n\times n}$ olyan, hogy $A_1 + \cdots + A_k = I$ (egységmátrix) és $A_iA_j = 0$ minden $i \neq j \in \{1, \ldots, k\}$-ra. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{C}^n = \mathrm{Im}(A_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}(A_k)$.