A rang néhány aspektusa

A ranggal először az egyenletrendszer megoldása kapcsán találkozunk: ez nem más, mint a Gauß-elimináció után a vezéregyesek száma. Akkor még nem tudtuk megválaszolni azt a fontos kérdést, hogy ez miért jóldefiniált, azaz miért független a Gauß-elimináció módjától. Most erre és ehhez kapcsolódó kérdésekre látunk néhány bizonyítást.

1. Definíció. *Legyen V egy vektortér a K test fölött. Egy V-beli $v_1, \dots, v_k$* vektorrendszer rangja *alatt az általuk generált altér dimenzióját értjük: $r(v_1, \dots, v_k) := \dim_K \langle v_1, \dots, v_k \rangle$. Egy $A \in K^{n \times k}$ mátrix* oszloprangja *(*sorrangja*) az oszlopvektorai (sorvektorai) által alkotott vektorrendszer rangja.*

2. Megjegyzés. *Mivel $v_1, \dots, v_k$ generátorrendszer az általuk generált altérben, ezért $v_1, \dots, v_k$-ból kiválasztható $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ egy bázisa. Tehát $r(v_1, \dots, v_k)$ megyezik a $v_1, \dots, v_k$ közül kiválasztható lineárisan független vektorok maximális számával.*

Annak bizonyítása, hogy a mátrix sorrangja és oszloprangja megegyezik, legtöbbször a *determinánsrangon* keresztül történik. Egy A mátrix determinánsrangja r, ha van $r \times r$-es nemnulla aldeterminánsa (minorja), de nincs $(r+1) \times (r+1)$-es. Mivel egy négyzetes mátrix determinánsa megyezik a transzponáltjának determinánsával, A és A^T determinánsrangja megygezik. Tehát elegendő belátni, hogy A oszloprangja megegyezik a determinánsrangjával, ahogy az a [1]-beli 3.4.2. Tételben történik. A bizonyítás Gauß-eliminációval történik: azt kell ellenőrizni, hogy a Gauß-elimináció során sem az oszloprang, sem a determinánsrang nem változik. Ennek ellenőrzése nem nehéz, de számolós, továbbá a determinánsrang esetében több esetet kell elkülönítenünk aszerint, hogy amikor az egyik sornak λ-szorosát hozzáadjuk a másikhoz, akkor a két sor szerepel-e az $r \times r$-es nemnulla aldeterminánsban.

A témával általában az előadás- és vizsgaanyagok [2] közül a második és hatodik dia foglalkozik. A hatodik előadásdia 5-6. oldalán van egy másik, rövid bizonyítás is a sor- és oszloprang egyenlőségére (a determinánsrangot nem használva). Egy harmadik, kicsit absztraktabb tárgyalásmód a következő.

3. Lemma. *Egy $A \in K^{n \times k}$ mátrix oszloprangja megegyezik az A-val való szorzás, mint*

$$\begin{aligned} \varphi_A \colon K^k &\to K^n \\ v &\mapsto Av \end{aligned}$$

lineáris leképezés képterének dimenziójával.

Bizonyítás. A φ_A képtere nem más, mint K^n-ben az A oszlopai által generált altér, hiszen A oszlopai a (szokásos) bázisvektorok képei φ_A-nál. Ezen altér dimenziója definíció szerint A oszloprangja. □

4. Következmény. *Ha $r(A)$ jelöli $A \in K^{n \times k}$ oszloprangját, akkor $r(A) \leq \min(n, k)$.*

Bizonyítás. $\mathrm{Im}(\varphi_A)$ egy altér K^n-ben, ezért dimenziója legfeljebb n. Másrészt $\dim \mathrm{Ker}(\varphi_A) + \dim \mathrm{Im}(\varphi_A) = \dim K^k = k$, így $r(A) = \dim \mathrm{Im}(\varphi_A) \leq k$. □

5. Lemma. *A oszloprangja nem változik (se a sorokon, se az oszlopokon elvégzett) Gauß-eliminációs lépések során.*

Bizonyítás. A sortranszformációs Gauß-eliminációs lépések megkaphatók alkalmas (invertálható) mátrixszal való balszorzással: pl. a $(I + \lambda E_{ij})A$ mátrix i-edik sorát úgy kapjuk, hogy A i-edik sorához a j-edik sor λ-szorosát adjuk, minden más sora pedig ugyanaz, mint A megfelelő sora (itt I az $n \times n$-es egységmátrix, E_{ij} pedig az az $n \times n$-es mátrix, melynek i-edik sorának j-edik eleme 1, a többi 0). Hasonlóképp az oszloptranszformációk alkalmas ($k \times k$-as, invertálható) mátrixszal való jobbszorzásnak felelnek meg. Tehát a Gauß-elimináció után kapott mátrix BAJ alakú, ahol $B \in K^{n \times n}$ és $J \in K^{k \times k}$

mindkettő invertálható. Speciálisan a szorzathoz tartozó lineáris leképezés $\varphi_{BAJ} = \varphi_B \circ \varphi_A \circ \varphi_J$, ahol φ_B és φ_J bijektív, így

$$BAJ \text{ oszloprangja} = \dim \operatorname{Im}(\varphi_{BAJ}) = \dim \operatorname{Im}(\varphi_A) = A \text{ oszloprangja.}$$

□

6. Megjegyzés. *Áttérve a transzponált mátrixra az is világos, hogy a sorrang sem változik a Gauß-elimináció során.*

7. Tétel. *Az $A \in K^{n\times k}$ mátrix sorrangja, oszloprangja, és determinánsrangja megegyezik, ez a Gauß-eliminációval előállított (redukált) lépcsős alakban a vezéregyesek száma. Speciálisan a rang kiszámítható (sorokon és oszlopokon akár vegyesen elvégzett) Gauß-eliminációval.*

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy mind a sorrang, mind az oszloprang megegyezik a Gauß-eliminációval előállított (redukált) lépcsős alakban a vezéregyesek számával. A 5. Lemma szerint a Gauß-elimináció során sem a sor- sem az oszloprang nem változik, tehát csak azt kell ellenőriznünk, hogy redukált lépcsős alakban levő mátrix oszloprangja (ill. sorrangja) megegyezik a vezéregyesek számával. Ha egy mátrix redukált lépcsős alakban van, akkor azok az oszlopok, melyekben van vezéregyes nyilván lineárisan függetlenek (hiszen ezek a szokásos bázisvektorok), a többi pedig előáll ezek lineáris kombinációjaként.

Tehát azt már láttuk, hogy a sorrang és az oszloprang megegyezik (jel.: $r(A)$), hátravan annak igazolása, hogy a determinánsrang is ennyi. Először vegyük észre, hogy nincs A-ban $(r(A)+1) \times (r(A)+1)$-es nemnulla aldetermináns: ha lenne, akkor ennek a részmátrixnak a sorai (oszlopai) lineárisan függetlenek lennének, tehát ennek megfelelő sorok A-ban is lineárisan függetlenek. Ugyanakkor van $r(A)$ darab lineárisan független sor A-ban, a többi sort elhagyva a kapott mátrix sorrangja továbbra is $r(A)$, így oszloprangja is ennyi. Tehát kiválasztható $r(A)$ darab oszlop ebben a sorelhagyás utáni mátrixban, melyek lineárisan függetlenek. Ez egy $r(A) \times r(A)$ méretű négyzetes mátrix, mely a Cramer-szabály szerint invertálható, azaz determinánsa nem 0. □

A fenti (és minden más Gauß-eliminációt használó) tárgyalásmód előnye, hogy algoritmust is ad a rang kiszámítására. Az absztraktabb, kevésbé algoritmikus módszerek kedvelőinek íme egy másik bizonyítás:

A 7. Tétel 2. bizonyítása. Csak arra adunk új bizonyítást, hogy az oszloprang megegyezik a sorranggal. Legelőször a transzponált mátrixhoz tartozó lineáris leképezésnek adunk értelmet. A duális bázis fogalmára a bilineáris függvények témakörében is szükségünk lesz.

8. Lemma. *Legyen V egy végesdimenziós vektortér a K test fölött, melyben $b_1, \dots, b_k$ bázis. Tekintsük a $V^* := \operatorname{Hom}_K(V, K)$ duális tér következő elemeit:*

$$b_i^*(b_j) := \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j \\ 0 & \text{ha } i \neq j \end{cases}.$$

Ekkor $b_1^*, \dots, b_k^*$ a V^* egy bázisát alkotják. Ezt nevezzük a $b_1, \dots, b_k$ bázis duális bázisának.

Bizonyítás. Mivel $\dim V^* = \dim V = k$, ezért elég belátnunk, hogy $b_1^*, \dots, b_k^*$ lineárisan független. Tegyük fel, hogy $\alpha_1 b_1^* + \dots + \alpha_k b_k^*$ azonosan 0. Ekkor $0 = (\alpha_1 b_1^* + \dots + \alpha_k b_k^*)(b_i) = \alpha_1 b_1^*(b_i) + \dots + \alpha_k b_k^*(b_i) = \alpha_i$ minden $1 \leq i \leq k$-ra. □

Legyen $\varphi\colon V \to W$ egy lineáris leképezés a K test fölötti végesdimenziós vektorterek között ($\dim V =: k$, $\dim W =: n$). Ekkor φ indukál egy lineáris leképezést a duális terek között *az ellenkező irányban*: a $\varphi^*\colon W^* \to V^*$ leképezés egy $f\colon W \to K$ lineáris függvényt az $f \circ \varphi\colon V \xrightarrow{\varphi} W \xrightarrow{f} K$ kompozícióba küldi, azaz $\varphi^*(f) := f \circ \varphi$. Könnyű számolás mutatja, hogy φ^* egy lineáris leképezés a duális terek között.

9. Lemma. *Ha φ mátrixa az (e, b) bázispárban A, akkor φ^* mátrixa a duális (b^*, e^*) bázispárban A^T.*

Bizonyítás. Azt kell megnézni, hogy mi $\varphi^*(e_i^*) = e_i^* \circ \varphi$ koordinátavektora a $b_1^*, \ldots, b_k^*$ bázisban ($1 \leq i \leq n$). Ha $A = ((a_{ij})) \in K^{n \times k}$, az azt jelenti, hogy $\varphi(b_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$ minden $1 \leq j \leq k$-ra. Ekkor $e_i^* \circ \varphi(b_j) = e_i^*(\sum_{r=1}^n a_{rj} e_r) = a_{ij}$. Tehát

$$\varphi^*(e_i^*) = \sum_{j=1}^k a_{ij} b_j^* \ ,$$

hiszen a $b_1, \ldots, b_k$ bázisvektorokon a két fenti lineáris leképezés ugyanazt az értéket veszi fel. Így azt kaptuk, hogy $[\varphi^*]_{b^*, e^*} = A^T$. □

A 7. Tétel igazolásához tehát azt kell belátnunk, hogy $\dim \operatorname{Im}(\varphi) = \dim \operatorname{Im}(\varphi^*)$. Ehhez azt vizsgáljuk meg, hogy mi φ^* *magja.* Ha $f \in W^*$ egy lineáris függvény W-n, akkor definíció szerint $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$. Ez pontosan akkor azonosan 0 a V vektortéren, ha $\operatorname{Im}(\varphi) \leq \operatorname{Ker}(f)$ (lsd. 3. feladatsor 15. feladat), azaz ha f eltűnik $\operatorname{Im}(\varphi)$-n. Tehát ha $\operatorname{Im}(\varphi)$ egy $e_1', \ldots, e_r'$ bázisát kiegészítjük $e_{r+1}', \ldots, e_n'$ vektorokkal W egy bázisává, akkor $f \in \operatorname{Ker}(\varphi^*)$ azonosan 0 az $e_1', \ldots, e_r'$ vektorokon, de tetszőlegesen előírható $e_{r+1}', \ldots, e_n'$-en. Tehát $\dim \operatorname{Ker}(\varphi^*) = n - r$, azaz $\dim \operatorname{Im}(\varphi^*) = n - (n - r) = r = \dim \operatorname{Im}(\varphi)$. □

10. Megjegyzés. *Azok számára, akik ismerik a faktortér fogalmát: Valójában azt láttuk be, hogy* $\operatorname{Ker}(\varphi^*) = (W/\operatorname{Im}(\varphi))^*$*, tehát a bizonyítás végén nincs szükség bázis választására.*

Hivatkozások

[1] Freud Róbert, *Lineáris algebra*, ELTE Eötvös Kiadó (2014).

[2] Kiss Emil, Algebra2 normál, előadás- és vizsgaanyagok (2018).