Értékelések, telítés és a p-adikus számok teste

1. Definíció. *Legyen K egy test. Egy $|\cdot|\colon K \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ függvényt (multiplikatív) értékelésnek (vagy abszolútértéknek) nevezünk, ha*

(1) $|x| = 0 \iff x = 0$*;*

(2) $|xy| = |x||y|$*;*

(3) $|x + y| \leq |x| + |y|$ *(ez az ún. háromszögegyenlőtlenség).*

Az $|\cdot|$ értékelés indukál egy $d(x, y) := |x - y|$ metrikát K-n. Így K egy metrikus tér (speciálisan van rajta egy topológia).

2. Példa. *A* triviális *abszolútérték:* $|x| = 1$ *ha* $x \neq 0$ *és* $|0| = 0$*.*

3. Lemma. *Tetszőleges $|\cdot|$ értékelésre $|1| = |-1| = 1$, és $|1/x| = 1/|x|$ $(x \neq 0)$.*

Bizonyítás. $|1| = |1 \cdot 1| = |1| \cdot |1|$, ahol $|1| \neq 0$. Továbbá $1 = |(-1)^2| = |-1|^2$, ahol $|-1| > 0$. Végül $1 = |x \cdot 1/x| = |x||1/x|$. □

4. Definíció. *$|\cdot|_1$ és $|\cdot|_2$ értékelések a K testen* ekvivalensek*, ha ugyanazt a topológiát indukálják.*

5. Állítás. *$|\cdot|_1$ és $|\cdot|_2$ akkor és csak akkor ekvivalens, ha létezik olyan $s > 0$ valós szám, melyre $|x|_1 = |x|_2^s$ minden $x \in K$-ra.*

Bizonyítás. Az $\Leftarrow$ irány triviális. A másik irányhoz vegyük észre, hogy $|x|_i < 1$ akkor és csak akkor teljesül, ha x hatványai nullához tartanak az $|\cdot|_i$ értékelésben $(i = 1, 2)$. Tehát ha $|\cdot|_1$ és $|\cdot|_2$ ugyanazt a topológiát indukálja, akkor $|x|_1 < 1$ akkor és csak akkor, ha $|x|_2 < 1$. Ezt x helyett a/b-re és b/a-ra is alkalmazva a 3. Lemma segítségével azt kapjuk, hogy $|a|_1 \leq |b|_1 \Leftrightarrow |a|_2 \leq |b|_2$ $(a, b \in K)$. Speciálisan ha $|\cdot|_1$ és $|\cdot|_2$ közül az egyik triviális, akkor a másik is, ezért feltehetjük, hogy létezik $y \in K$, melyre $|y|_1 > 1$. Ekkor $|y|_2 > 1$, ezért választhatjuk az $s > 0$ valós számot úgy, hogy $|y|_1 = |y|_2^s$. Tetszőleges $0 \neq x \in K$-ra van olyan $\alpha = \alpha(x) \in \mathbb{R}$, melyre $|x|_1 = |y|_1^\alpha$. Vegyük racionális számoknak egy szigorúan monoton csökkenő $(\frac{m_i}{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ $(m_i, n_i \in \mathbb{Z}, n_i \neq 0)$ sorozatát, melynek határértéke α. Ekkor $|x|_1 = |y|_1^\alpha < |y|_1^{m_i/n_i}$, azaz $|x^{n_i}|_1 < |y^{m_i}|_1$, így $|x^{n_i}|_2 < |y^{m_i}|_2$, azaz $|x|_2 < |y|_2^{m_i/n_i}$. i-vel végtelenhez tartva azt kapjuk, hogy $|x|_2 \leq |y|_2^\alpha$. Másrészt ha α-t alulról közelítjük racionálisakkal, akkor $|x|_2 \geq |y|_2^\alpha$ hasonlóképp adódik, tehát $|x|_1 = |y|_1^\alpha = |y|_2^{s\alpha} = |x|_2^s$ teljesül minden $0 \neq x \in K$-ra (és persze $x = 0$-ra is). □

6. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $|\cdot|$ értékelés* nemarkhimédeszi*, ha a $\{|n \cdot 1|\colon n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R}$ halmaz korlátos, illetve* arkhimédeszi *ha ez a halmaz nem korlátos (v.ö.: arkhimédeszi axióma, mely szerint minden valósnál van nagyobb egész).*

7. Megjegyzés. *Mondhattuk volna azt is, hogy ha a $f\colon \mathbb{Z} \to K$, $f(1) = 1$ gyűrűhomomorfizmus képe* korlátos *K-ban, akkor a $|\cdot|$ nemarkhimédeszi. Viszont ehhez definiálnunk kellett volna a korlátosságot K részhalmazaira.*

8. Példa. *1. A triviális értékelés nemarkhimédeszi.*

2. *A szokásos (a mostani jegyzetben $|\cdot|_\infty$-nel jelölt) abszolútérték $\mathbb{R}$-en (vagy $\mathbb{C}$-n vagy ezeknek egy résztestén) arkhimédeszi.*

3. *Legyen p egy prímszám. Vegyük $\mathbb{Q}$-n az $|\cdot|_p$ ún. p-adikus értékelést, melyre $|\frac{a}{b}p^n|_p = p^{-n}$, ahol $p \nmid a, b \in \mathbb{Z}$, és $|0|_p = 0$. Ez nemarkhimédeszi, hiszen ha $\frac{a}{b}p^n \in \mathbb{Z}$, akkor $n \geq 0$, azaz $|\frac{a}{b}p^n|_p = p^{-n} \leq 1$.*

9. Gyakorlat. *Igazoljuk, hogy a fent definiált p-adikus értékelés $\mathbb{Q}$-n valóban teljesíti az $(1)-(3)$ axiómákat.*

10. Állítás. *A $|\cdot|$ értékelés akkor és csak akkor nemarkhimédeszi, ha teljesül az ún.* ultrametrikus *egyenlőtlenség, mely szerint*

$(3')$ $|x+y| \leq \max(|x|, |y|)$.

Sőt, ha $|\cdot|$ nemarkhimédeszi, akkor $\{|n\cdot 1|, n \in \mathbb{Z}\}$ nemcsak korlátos, hanem $|n \cdot 1| \leq 1$.

Bizonyítás. Ha teljesül az ultrametrikus egyenlőtlenség, akkor nyilván $|n\cdot 1| \leq |1| = 1$. Másrészt ha $k > 0$ egész, $|x| \geq |y|$ és $|n \cdot 1| \leq C$ valamilyen $0 < C \in \mathbb{R}$-re, akkor

$$|x+y|^k = |(x+y)^k| = |\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^j y^{k-j}| \leq \sum_{j=0}^{k} |\binom{k}{j}\cdot 1||x|^j|y|^{k-j} \leq \sum_{j=0}^{k} C|x|^k = (k+1)C|x|^k\ .$$

A fenti egyenletből k-adik gyököt vonva és k-val tartva a végtelenbe adódik az állítás. □

11. Tétel (Ostrowski)**.** *A racionális számok $\mathbb{Q}$ testén ekvivalencia erejéig csak a triviális, a valós $|\cdot|_\infty$ és a p-adikus $|\cdot|_p$ értékelések vannak (ahol $p \in \mathbb{N}$ végigfut a prímszámokon).*

Bizonyítás. Hogy össze ne keverjük $|\cdot|_\infty$-vel, használjuk inkább a $\|\cdot\|$ jelölést az értékelésre ebben a bizonyításban. Tehát vegyünk egy $\|\cdot\|\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ értékelést.

1. eset: $\|\cdot\|$ nemarkhimédeszi. Ha minden p prímszámra $\|p\| = 1$, akkor az értékelés triviális (negatívokra lásd 3. Lemma). Tehát feltehetjük, hogy van olyan p prím, melyre $\|p\| < 1$. Vegyük észre, hogy ekkor az $A := \{a \in \mathbb{Z} \colon \|a\| < 1\}$ egy ideál $\mathbb{Z}$-ben, hiszen zárt az összeadásra a $(3')$ ultrametrikus egyenlőtlenség miatt, és (2) miatt a külső elemmel való szorzásra is, hiszen a 10. Állítás szerint $\|n\| \leq 1$, ha $n \in \mathbb{Z}$. Node $p \in A$, ugyanakkor $1 \notin A$, ezért $A = (p)$, hiszen (p) egy maximális ideál $\mathbb{Z}$-ben. Ez viszont azt jelenti, hogy $p \nmid a, b \in \mathbb{Z}$ esetén $\|a\| = \|b\| = 1$, azaz $\|\frac{a}{b}p^n\| = \|p\|^n = |\frac{a}{b}p^n|_p^s$, ahol $s := \log_{1/p}\|p\|$.

2. eset: $\|\cdot\|$ arkhimédeszi. Legyen $1 < m, n \in \mathbb{Z}$ tetszőleges.

12. Lemma. *Ekkor $\|m\|^{1/\log m} = \|n\|^{1/\log n}$, ahol* log *a természetes alapú logaritmust jelöli (valójában mindegy, hogy melyik).*

Bizonyítás. Írjuk fel m-et n-es számrendszerben, azaz $m = \sum_{i=0}^{r} a_i n^i$, ahol $0 \leq a_i < n$ $(0 \leq i \leq r)$. Ekkor $n^r \leq m$, azaz $r \leq \frac{\log m}{\log n}$, továbbá $\|a_i\| \leq a_i\|1\| = a_i \leq n$. Így

$$\|m\| = \|\sum_{i=0}^{r} a_i n^i\| \leq \sum_{i=1}^{r} \|a_i\|\|n\|^i\ . \tag{1}$$

Vegyük észre, hogy ha $\|n\| \leq 1$, akkor $\|m\| \leq nr \leq \frac{n \log m}{\log n}$. Utóbbit m helyett m^k-ra alkalmazva és k-adik gyököt vonva $\|m\| \leq \sqrt[k]{\frac{kn \log m}{\log n}}$ adódik, ami $k \to \infty$-vel m-től független korlátot ad $\|m\|$-re. Ez pedig ellentmond annak, hogy $\|\cdot\|$ arkhimédeszi. Tehát $\|n\| > 1$, és (1) miatt

$$\|m\| \leq \sum_{i=0}^{r} \|a_i\| \|n\|^i \leq \|n\|^r \sum_{i=0}^{r} \|a_i\| \leq \|n\|^r n(r+1) \leq \|n\|^{\log m/\log n} n(1 + \frac{\log m}{\log n}) \ .$$

Ebben m helyére m^k-t írva, k-adik gyököt vonva és k-val tartva a végtelenbe azt kapjuk, hogy $\|m\| \leq \|n\|^{\log m/\log n}$. Az állítás m és n szerepének felcserélésével adódik. $\square$

Legyen $s := \frac{\log \|n\|}{\log n}$ valamilyen $1 < n \in \mathbb{Z}$-re. A fenti Lemma szerint s nem függ n választásától, és pozitív. Így $\|m\| = e^{s \log m} = m^s = |m|_\infty^s$ minden $1 < m \in \mathbb{Z}$-re, sőt, a 3. Lemma miatt $m \leq 1$-re is, tehát hányadost képezve minden racionális m-re is. $\square$

13. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a K test* teljes *a $|\cdot|$ értékelésre nézve, ha minden Cauchy-sorozat konvergens.*

14. Példa. *$\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ teljes a $|\cdot|_\infty$ értékelésre nézve, $\mathbb{Q}$ viszont csak a triviális értékelésre nézve teljes, hiszen ebben minden Cauchy sorozat valamilyen indextől kezdve konstans.*

A továbbiakban azt mutatjuk meg, hogy lehet egy tetszőleges értékelt testet beágyazni egy teljes testbe. Legyen K tehát egy test, melyen értelmezve van egy $|\cdot|$ értékelés. Definiáljuk

$$R := \{(a_n)_n \in K^{\mathbb{N}} \colon \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}, \text{ melyre } |a_n - a_m| < \varepsilon \text{ ha } m, n \geq N\}\text{-et}$$

mint a K-beli Cauchy-sorozatok gyűrűjét. Ez valóban gyűrű a koordinátánkénti műveletekre, hiszen Cauchy-sorozatok összege, különbsége és szorzata is Cauchy. Vegyük észre, hogy K diagonálisan beágyazódik R-be, azaz van egy $\iota \colon K \to R$ injektív gyűrűhomomorfizmus, melyet a $\iota(c) := (c)_n$ képlet definiál, azaz egy $c \in K$ elem esetén $\iota(c)$ a konstans c sorozat. Legyen I_0 azon sorozatok halmaza, amik véges sok tagtól eltekintve azonosan 0-k. Ekkor $I_0 \lhd R$ egy ideál. Jelöljül $R/I_0 =: R_0$-lal a faktorgyűrűt. R_0-ra gondolhatunk úgy is, mint a Cauchy-sorozatok ekvivalencia-osztályainak gyűrűjére, ahol két Cauchy-sorozat ekvivalens, ha véges sok tagtól eltekintve megegyeznek.

15. Állítás. *R_0 lokális gyűrű, melyben a maximális ideált a nullasorozatok alkotják.*

Bizonyítás. Jelöljük M-mel azt a részhalmazát R-nek, melynek elemei a nullasorozatok (azaz a 0-hoz konvergáló sorozatok). M nyilván zárt a kivonásra és az R-beli elemmel való szorzásra, tehát $M \lhd R$. Sőt, nyilván $I_0 \subseteq M$. Másrészt ha $(a_n)_n$ egy Cauchy-sorozat, melynek tagjai nem tartanak a 0-hoz, akkor $(1/a_n)_{n \geq N}$ is egy Cauchy-sorozat elég nagy N-re (hiszen ha N elég nagy, akkor $N \leq n$ esetén $a_n \neq 0$), tehát $(a_n)_n$ invertálható R_0-ban. Így M valóban maximális ideál. $\square$

16. Definíció. *Legyen K test egy $|\cdot|$ értékeléssel. Ekkor $(K, |\cdot|)$* telítettje *definíció szerint a $\hat{K} := R/M$ test.*

17. Megjegyzés. *$\hat{K}$ valóban test, hiszen R-et egy maximális ideállal faktorizáltuk.*

Vegyük észre, hogy a ι beágyazás kompozíciója az $R \to \hat{K} = R/M$ faktorleképezéssel még mindig injektív: ha $0 \neq c \in K$, akkor a konstans c sorozat nem tart nullához, azaz nincs benne M-ben. Tehát innentől K-t úgy tekintjük, mint $\hat{K}$ egy résztestét. Be kell még látnunk, hogy $\hat{K}$ valóban egy telített, azaz teljes. Ehhez legelőször ki kell terjesztenünk az $|\cdot|$ értékelést K-ról $\hat{K}$-ra. Mivel $|a_m| \leq |a_n| + |a_m - a_n| < |a_n| + \varepsilon$, ha $n, m > N = N(\varepsilon)$ elég nagy, ezért ha $(a_n)_n$ Cauchy-sorozat K-ban, akkor $|a_n|$ is Cauchy, tehát konvergens $\mathbb{R}$-ben. Így értelmezhetjük egy $(a_n)_n$ Cauchy-sorozat értékelését az $|(a_n)_n| := \lim_{n\to\infty} |a_n|$ limesszel. Nyilván ha $(a_n)_n$ és $(b_n)_n$ különbsége nullasorozat – azaz $(a_n)_n$ és $(b_n)_n$ M-szerinti mellékosztálya megegyezik –, akkor $|(a_n)_n| = |(b_n)_n|$. Továbbá a konstans c sorozat értékelése nyilván megegyezik c értékelésével. Ily módon kiterjesztettük $|\cdot|$-et $\hat{K}$-ra. Egyszerű számolás mutatja, hogy $|\cdot|$-ra teljesülnek $\hat{K}$-on is az $(1) - (3)$ axiómák.

18. Állítás. *$\hat{K}$ teljes a kiterjesztett $|\cdot|$ értékelésre nézve.*

Bizonyítás. Be kell látnunk, hogy Cauchy-sorozatok ekvivalenciaosztályainak egy Cauchy-sorozata konvergál egy Cauchy-sorozat ekvivalenciaosztályához. Ha $i \in \mathbb{N}$, akkor jelölje az i-edik Cauchy-sorozat n-edik elemét $a_n^{(i)}$. Az, hogy a Cauchy-sorozataink sorozata Cauchy, azt jelenti, hogy minden $\varepsilon > 0$-ra létezik olyan nagy $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy ha $i, j \geq N(\varepsilon)$, akkor van olyan $M(i, j, \varepsilon) \in \mathbb{N}$, melyre $|a_m^{(i)} - a_m^{(j)}| < \varepsilon$, ha $m \geq M(i, j, \varepsilon)$. Továbbá minden rögzített $i \in \mathbb{N}$-re az $(a_n^{(i)})_n$ sorozat is Cauchy, így minden i-re van olyan $n_i \in \mathbb{N}$, melyre $|a_{n_i}^{(i)} - a_m^{(i)}| < 1/2^i$, ha $m \geq n_i$. Belátjuk, hogy az $(a_{n_i}^{(i)})_i$ sorozat Cauchy, és ennek ekvivalenciosztálya lesz a határérték. Rögzített $\varepsilon > 0$-hoz legyen $i, j \geq N(\varepsilon/3)$ olyan, hogy $1/2^i, 1/2^j < \varepsilon/3$. Tehát ha $m \geq M(i, j, \varepsilon/3)$, akkor $|a_m^{(i)} - a_m^{(j)}| < \varepsilon/3$. Így

$$|a_{n_i}^{(i)} - a_{n_j}^{(j)}| = |(a_{n_i}^{(i)} - a_m^{(i)}) + (a_m^{(i)} - a_m^{(j)}) + (a_m^{(j)} - a_{n_j}^{(j)})| \leq \frac{1}{2^i} + \varepsilon/3 + \frac{1}{2^j} < \varepsilon \ ,$$

azaz az $(a_{n_i}^{(i)})_i$ sorozat Cauchy. Az, hogy ez a határérték, világos, hiszen minden $\varepsilon > 0$ létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $i \geq N$ esetén az i-edik sorozat $(a_n^{(i)})_n$ már ε-nyira közel van ehhez, azaz $|a_n^{(i)} - a_{n_n}^{(n)}| < \varepsilon$ minden elég nagy n-re. □

19. Megjegyzés. *A $\hat{K}$ telítettnek megvan a következő univerzális tulajdonsága: Ha van egy $K \hookrightarrow L$ értékeléstartó testhomomorfizmus egy teljes L testbe, akkor az kiterjed értékeléstartóan K-ról $\hat{K}$-ra, sőt a kiterjesztés egyértelmű.*

20. Definíció. *A p-adikus számok $\mathbb{Q}_p$ teste legyen $\mathbb{Q}$ telíıtettje a p-adikus $|\cdot|_p$ normára nézve.*

A p-adikus számok testének fenti definíciója Kürschák Józseftől származik, természetességét Ostrowski tétele is mutatja. Ennek a definíciónak az is az előnye, hogy viszonylag könnyen általánosítható $\mathbb{Q}$ helyett más testekre, sőt akár integritási tartományokra. Utóbbi a nemarkhimédeszi analitikus geometriának a kiindulópontja, melyben egy R integritási tartomány analitikus spektruma az összes rajta értelmezett abszolútérték halmaza – ezen a halmazon természetes módon lehet definiálni topológiát is.

Viszont Cauchy-sorozatok ekvivalenciaosztályaival nehéz számolni, ezért hasznos a p-adikus számoknak az alábbi, p-adikus sorfejtése.

21. Definíció. *Ha $(K, |\cdot|)$ egy – nem feltétlenül teljes – nemarkhimédeszien értékelt test, akkor legyen $\mathcal{O}_K := \{a \in K : |a| \leq 1\}$ az* egészek gyűrűje *K-ban. Az ultrametrikus egyenlőtlenség miatt ez valóban részgyűrű.*

22. Gyakorlat. *Az $\mathcal{O}_K$ gyűrű egy lokális gyűrű, azaz egyetlen maximális ideálja van. A maximális ideálja $\mathcal{M}_K := \{a \in K : |a| < 1\}$. Az $\mathcal{O}_L/\mathcal{M}_K$ testet a maradéktestnek (vagy a maradékosztályok testének) nevezik.*

23. Definíció. *A p-adikus egészek $\mathbb{Z}_p$ gyűrűje az egészek $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}_p}$ gyűrűje a p-adikus számok $\mathbb{Q}_p$ testében.*

24. Lemma. *A $|\cdot|_p$ értékelés értékkészlete $\mathbb{Q}_p$-n ugyanaz, mint $\mathbb{Q}$-n, azaz $\{0\} \cup p^{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$.*

Bizonyítás. Definíció szerint $|\mathbb{Q}| = \{0\} \cup p^{\mathbb{Z}}$. Ez a halmaz zárt $\mathbb{R}$-ben, sőt, egyetlen torlódási pontja a 0. Viszont az értékelés nyilvánvalóan folytonos az általa definiált topológiában, és $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}_p$ sűrű, ezért $|\mathbb{Q}_p| = \{0\} \cup p^{\mathbb{Z}}$. □

25. Megjegyzés. *A fenti bizonyítás azt is mutatja, hogy ha $(a_n)_n$ egy Cauchy-sorozat ($a_n \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}$) a p-adikus értékelésben, és $(a_n)_n$ nem nullasorozat, akkor $(|a_n|)_n$ sorozat véges sok tagtól eltekintve konstans, hiszen 0-n kívül nincs más torlódási pontja $\{0\} \cup p^{\mathbb{Z}}$-nek.*

26. Állítás. *$\mathbb{Z}_p$-ben a maximális ideál $p\mathbb{Z}_p$, és a faktorgyűrű $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p$.*

Bizonyítás. Vegyünk egy x elemet $\mathbb{Z}_p$-ben, mely az $(a_n/b_n)_n$ Cauchy-sorozat ekvivalenciaosztálya, ahol $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$, $b_n \neq 0$ és $(a_n, b_n) = 1$. Ha n elég nagy, akkor $|a_n/b_n|_p \leq 1$, azaz $p \nmid b_n$. Másrészt mivel a sorozat Cauchy, van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n, m \geq N$-re $|a_n/b_n - a_m/b_m|_p \leq p^{-1}$, azaz $a_n/b_n \equiv a_m/b_m \pmod p$. Rendeljük hozzá x-hez az $a_n/b_n \pmod p \in \mathbb{F}_p$ értéket. Ez egy szürjektív $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{F}_p$ gyűrűhomomorfizmus, melynek magja $p\mathbb{Z}_p$. Tehát $p\mathbb{Z}_p$ maximális ideál $\mathbb{Z}_p$-ben (hiszen a faktorgyűrű test), ezért a 22. Gyakorlat szerint ez az egyetlen maximális ideál. □

27. Tétel. *$\mathbb{Q}_p$ minden eleme egyértelműen írható $x = \sum_{n=-N}^{\infty} x_n p^n$ konvergens hatványsor alakban, ahol $x_n \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ ($N \leq n \in \mathbb{Z}$). Továbbá ha $x_{-N} \neq 0$, akkor $|x|_p = p^N$.*

Bizonyítás. Ha $x = 0$, akkor legyen $x_n = 0$ minden $n \in \mathbb{Z}$-re. Ha $x \neq 0$, akkor a 24. Lemma miatt $|x| = p^N$ valamilyen $N \in \mathbb{N}$-re. Szükség esetén x-et megszorozva p^N-nel feltehetjük, hogy $N = 0$. A 26. Állítás miatt van olyan $x_0 \in \{1, \ldots, p-1\}$, melyre $x - x_0 \in p\mathbb{Z}_p$. Ugyanezt x helyett $(x-x_0)/p$-re elmondva van olyan $x_1 \in \{0, \ldots, p-1\}$, melyre $(x-x_0)/p - x_1 \in p\mathbb{Z}_p$, és így tovább. Vegyük észre, hogy a(z a priori formális) $\sum_{n=0}^{\infty} x_n p^n$ sor konvergens, hiszen tagjai tartanak a 0-hoz a $|\cdot|_p$ értékelésben. Sőt, $p^{k+1} \mid x - \sum_{n=0}^{k} x_n p^n$, azaz $|x - \sum_{n=0}^{k} x_n p^n|_p \leq p^{-k-1}$, azaz a határérték épp x. □