1. előadás ①

Vektortéraxiómák:

K közt. test. V halmaz $\neq \emptyset$ vt. K felett, ha

(1)-(4) V Abel-csoport egy + összeadásra nézve

Létezik egy $K \times V \to V$ szorzás, melyre:

(5) $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$

(6) $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$

(7) $(\lambda+\mu)u = \lambda u + \mu u$

(8) $1 \cdot v = v$.

Pl.: (1) K^n: oszlopvektorok.

(2) $K[x]$ (polinomok

(3) legf. n fokú pol.-k.

Def.: $v_1, \dots, v_n \in V$ vektorok lineáris kombinációja: $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ alakú kif.

v lin. függ $v_1, \dots, v_n$-től, ha $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n$

$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$.

$v_1, \dots, v_n$ lin. ftlen, ha $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0 \Rightarrow$

$\forall i\ \alpha_i = 0$.

lin. öf., ha nem ftlen.

triviális lin. komb.: $0 v_1 + \dots + 0 \cdot v_n$

$H \subseteq V$ (akár végtelen) lin. ftlen, ha bár-

mely véges része lin. ftlen.

2

Áll.: $\emptyset \neq H \subseteq V$ lin. öf. $\Longleftrightarrow$ $\exists\, v \in H$, ami függ a többitől.

Biz.: $\boxed{\Rightarrow}$ $H \subseteq V$ öf. $\Rightarrow \exists\, v_1, \dots, v_n \in H$, $\alpha_1, \dots$

$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$ úgy hogy α_i mind

$\exists\, i \;\; \alpha_i \neq 0$

$$\Rightarrow v_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i} v_1 - \dots - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} v_{i-1} - \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_i}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ $v = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_j$ függ a többitől.

$$\Rightarrow \underbrace{1}_{\neq 0} v - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_j = 0 \quad \square$$

Def.: $W \subseteq V$ részhalmaz altér (résvertortér) ha vt. a V-beli műveletekre. jel: $W \leq V$

Pl.: V, $\{0\}$

$H \subseteq V$ által generált altér: legszűkebb H-t tartalmazó altér.

Áll.: $\emptyset \nleq V$ (0 nincs benne) $\emptyset \neq W \subseteq V$ altér $\Longleftrightarrow$ zárt a műveletekre $\Longleftrightarrow$ zárt a lin. kombinációkra

Biz.: világos. $\square$

Áll.: $\langle H \rangle$ létezik, mégpedig $\langle H \rangle = \bigcap_{H \subseteq W \leq V} W$

Biz.: alterek metszete altér. $\square$

Áll.: $\langle H \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \;\middle|\; v_i \in H, \alpha_i \in K \right\}$

$(\langle \emptyset \rangle = \{0\})$

Def.: $H \subseteq V$ grst., ha $\langle H \rangle = V$. H bázis, ha ftlen grst.

Lemma (kicserélési tétel) V vektortér

~~$f_1, f_2, \ldots$~~ $F \subseteq V$ lin. ftlen., $G \subseteq V$ grst.

$\Rightarrow \forall f \in F \; \exists g \in G$, melyre

$F \setminus \{f\} \cup \{g\}$ is ftlen.

Biz.: Legyen $f \in F$. Mivel G grst, $f \in \langle G \rangle$, akkor $\exists g_1, \ldots, g_n \in G$ és $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$, melyre $f = \alpha_1 g_1 + \ldots + \alpha_n g_n$.

Tfh. $F \setminus \{f\} \cup \{g_j\}$ öf. $\forall j = 1, \ldots, n$-re.

Ekkor $\exists$ nemtrivi. lin. komb., ami 0. Mivel $F \setminus \{f\}$ ftlen (F is az), ezért g_j eh. $\neq 0$. $\Rightarrow$ g_j kifejezhető a többivel.

$$g_j = \sum_{k=1}^{n_j} \lambda_{j,k} f_{j,k} \qquad f_{j,k} \in F \setminus \{f\}$$

$$\Rightarrow f = \alpha_1 \sum_{k=1}^{n_1} \lambda_{1,k} f_{1,k} + \ldots + \alpha_n \sum_{k=1}^{n_n} \lambda_{n,k} f_{n,k}$$

lin. függ a többitől $\lightning$

Köv.: Ha F ftlen és G grst $\Rightarrow |F| \leq |G|$. (ha végesek, de ha nem, akkor is...)

Def.: V végesdim, ha $\exists$ véges grst.

Tétel Minden végesdim. V vektortérnek $\exists$ bázisa, sőt, $\forall$ ftlen rst. kieg.-hető bázissá, és $\forall$ grst-ből kiv.-ható bázis.

④

Biz.: 1) F ftlen. $\dim V < \infty \Rightarrow |F| < \infty$ (KGt.)

$\{f_1, \ldots, f_n\} = F$

Ha $\langle f_1, \ldots, f_n \rangle = V$ kész

Ha $\neq V \Rightarrow$

$\exists f_{n+1} \notin \langle f_1, \ldots, f_n \rangle$
$\in V$

$\Rightarrow f_1, \ldots, f_n, f_{n+1}$ is ftlen

(Ha $\exists$ lin. komb. nemtriv., ami 0, akkor

f_{n+1} eh.-ja $\neq 0 \Rightarrow$ kifejezhe

Sőt. véges lép., mert $|F| \leq |G| < \infty$.

2) Már láttuk, hogy $\exists$ bázis ($\emptyset$ ftlen, ezért kiegészíthető bázissá).

$b_1, \ldots, b_n$ bázis. Kicserélési tétellel felcseréljük G elemeit $\Rightarrow$ G-ből kiválasztunk lin. ftlen részt, ami bázis lesz.

Áll.: V vég. dim. $\Rightarrow$ bázis elemszám egyértel-

mű. Sőt, ha F ftlen és $|F| = |B|$ $\Rightarrow$ F is bázis, $|G| = |B| \Rightarrow G$ is bázis
(G grst., B bázis)

Biz.: B_1, B_2 bázis. B_1 ftlen B_2 grst.

$\Rightarrow |B_1| \leq |B_2|$. ugy. $|B_2| \leq |B_1|$. ✓

F kieg.-hető bázissá. G-ből kiv.-a bázis $\square$

Végtelen dim.-s vektorterek

5

Zorn lemma (NB, halmazelmélet)

X halmaz, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(X)$ (azaz $\mathcal{H}$ az X bizonyos részhalmazainak halmaza)

Tfh. (1) $\mathcal{H} \neq \emptyset$.

(2) $\mathcal{H}$-ban $\forall$ láncnak az uniója $\mathcal{H}$-ban van.

$\Longrightarrow$ $\mathcal{H}$-ban van maximális elem

Tétel Minden vektortérnek van bázisa

Biz.: V vektortér. $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(V)$ a lin. ftlen vektorrendszerek halmaza. ($A \in \mathcal{H} \Leftrightarrow A$ lin. ftlen.).

$A \subseteq V$

(1) $\mathcal{H} \neq \emptyset$ ✓.

(2) $\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}$ lánc ($\forall A, B \in \mathcal{H}'$-re $A \subseteq B$ vagy $B \subseteq A$).

$\Rightarrow$ $\bigcup_{A \in \mathcal{H}'} A$ is ftlen: Tfh. $\exists\, v_1, \dots, v_n \in \bigcup_{A \in \mathcal{H}'} A$ ∅f

$\Rightarrow$ $A_1, A_2, \dots, A_n$-ben van benne
ezek közt $\exists$ legnagyobb! pl. A_1: abban $\forall$ benne van és ftlen. ↯

$\overset{\text{Zorn lemma}}{\Longrightarrow}$ $\exists\, F \in \mathcal{H}$ maximális.

Áll.: F bázis, azaz $\langle F \rangle = V$.

Biz.: Tfh. $g \in V \setminus \langle F \rangle$. Ekkor $F \cup \{g\}$ is ftlen ↯ (F max.) $\square$

Mj.: lin. ftlen vrsz kiegészíthető bázissá, grsz.-ből kiv.-ható bázis

Pl.: $\mathbb{R}$-nek mint $\mathbb{Q}$-vt.-nek $\exists$ bázisa

Hamel-bázis

2. előadás

Alterek összege

$U_1, U_2 \leq V$ alterek (V vt. / K test).

Def: $U_1 + U_2 := \{ u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2 \}$.

Áll.: $U_1 + U_2$ altér

Biz.: $u_1 + u_2 + v_1 + v_2 = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) \in U_1 + U_2$

$\lambda(u_1 + u_2) = \lambda u_1 + \lambda u_2 \in U_1 + U_2$ $\square$

Tétel: $\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim U_1 \cap U_2$

Biz.: $U_1 \cap U_2$-ben $a_1, \dots, a_k$ bázis

kieg.-jük U_1 bázisává $b_1, \dots, b_l$-lel

— " — U_2 — " — $c_1, \dots, c_m$-mel

$\Rightarrow \dim U_1 = k + l$, $\dim U_2 = k + m$, $\dim U_1 \cap U_2 = k$

Kell: $\dim(U_1 + U_2) = k + l + m$. Ehhez:

$a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l, c_1, \dots, c_m$ bázis $U_1 + U_2$-ben.

grsz: ✓

ftlen: $\underbrace{\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_l b_l}_{\in U_1} + \gamma_1 c_1 + \dots + \gamma_m c_m = 0$

$= -(\gamma_1 c_1 + \dots + \gamma_m c_m) \in U_2$

$\Rightarrow \exists \alpha_1', \dots, \alpha_k'$

$\alpha_1' a_1 + \dots + \alpha_k' a_k = -\gamma_1 c_1 - \dots - \gamma_m c_m \Rightarrow \alpha_1' = \dots = \alpha_k' = \gamma_1 = \dots = \gamma_m = 0$ (lin ftlenek)

Hasonlóan $\beta_1 = \dots = \beta_l = 0$. $\square$

Def.: $U_1 + \ldots + U_k$ (F.) összeg direkt, ha
$\forall\, u \in U_1 + \ldots + U_k$ egyértelműen áll el
$u = u_1 + \ldots + u_k$ alakban. $(u_i \in U_i)$

Jel: $U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$

Pl.: $b_1, \ldots, b_n$ bázis $\Rightarrow V = \langle b_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle$

Áll: $\sum_{i=1}^{k} U_i$ direkt $\Leftrightarrow \forall\, 1 \le i \le k$ - r

$$U_i \cap (U_1 + \ldots + U_{i-1}) = \{0\}.$$

Biz.: $\boxed{\Rightarrow}$ Tfh. $u_1 + \ldots + u_{i-1} = u_i$
$\rightarrow$ ez két különböző felírás.

$\boxed{\Leftarrow}$ Indirekt. Legyen
$u_1 + \ldots + u_k = v_1 + \ldots + v_k$. Legyen i
a legn., melyre $u_i \neq v_i \Rightarrow u_i - v_i \in U_i$
felírható $U_1 + \ldots + U_i$

Def.: $U \le V$ - nek W direkt kieg. - je
ha $U \oplus W = V$.

Áll.: $\forall\, U \le V$ - nek $\exists$ direkt kieg.-je.

Biz.: $\{b_1, \ldots, b_k\}$ bázis U-ban,
$a_1, \ldots, a_l$ - lel kieg. V bázisává.
$W := \langle a_1, \ldots, a_l \rangle$ jó. $\square$

~~Küls. ...~~ Külső direkt összeg

$V_1, \ldots, V_n$ vt. $/ K$.
$$V_1 \oplus \ldots \oplus V_n := \{(v_1, \ldots, v_n) \mid v_i \in V_i,\ i = 1, \ldots, n\}$$
$+, \cdot$: koordinátánként.
Vektortér.

$V_1' := \{(v_1, 0, \ldots, 0)\} \subseteq V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$
stb.

8.

Áll.: $V_1 \oplus \dots \oplus V_n = \overline{V_1} \oplus \dots \oplus \overline{V_n}$

$\underbrace{\oplus}_{\text{„külső"}}$ $\quad$ $\underbrace{\oplus}_{\text{„belső"}}$

Biz.: $(v_1, \dots, v_n) = (v_1, 0, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, 0, v_n)$

$(\Rightarrow \overline{V_1} + \dots + \overline{V_n} = V_1 \oplus \dots \oplus V_n)$

$\overline{V_i} \cap (\overline{V_1} + \dots + \overline{V_{i-1}}) = \{0\}$ $\square$

Köv.: $\dim(V_1 \oplus \dots \oplus V_n) = \dim V_1 + \dots + \dim V_n$.

Végtelen sok V_i? 2 fogalom

$\prod_{i \in I} V_i = \{(\dots, v_i, \dots) \mid v_i \in V_i \ (i \in I)\}$ -> direkt szorzat.

$\bigoplus_{i \in I} V_i = \{(\dots, v_i, \dots) \mid v_i \in V_i \ (i \in I)\}$ -> direkt összeg. $v_i = 0$ véges sok kivétellel

Lineáris leképezések

Def.: V, W vt. $/K$ $\quad \varphi: V \to W$ lin. lekép.,

ha $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$ és $\varphi(\lambda v_1) = \lambda \varphi(v_1)$.

„vektortérhomomorfizmus"

Pl.: 1) $A \in K^{k \times n}$ $\quad \varphi_A: K^n \to K^k$, $v \mapsto Av$.

2) $K[x] \to K[x]$ deriválás

3) egybevágósági, hasonlósági trf., vetítés, ha az origó fixen marad

4) $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ konjugálás ($\mathbb{R}$ felett).

Áll.: $\varphi(0) = 0$ $\quad$ Biz.: $\underbrace{\varphi(0)}_{} = \varphi(0+0) = \varphi(0) + \varphi(0)$ $\square$

Def.: lin. transzformáció: $\varphi: V \to V$ lin. lekép.

Tétel $\{b_1, \dots, b_n\}$ bázis V-ben, $a_1, \dots, a_n \in W$ arábármi.

$\Rightarrow \exists!\ \varphi: V \to W$ lin. lekép. $\varphi(b_i) = a_i$

9

Biz.: $v \in V \Rightarrow \exists! \beta_1, \dots, \beta_n \in K$

$v = \beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n$.

Ha φ lin. $\Rightarrow \varphi(v) = \beta_1 \varphi(b_1) + \dots + \beta_n \varphi(b_n)$ lehet ($\Rightarrow$ egyértelmű). De ez lin. $\Rightarrow \exists$ $\square$

Def.: $\operatorname{Im}\varphi := \{\varphi(v) \mid v \in V\}$. $\operatorname{Ker}\varphi := \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}$.

Áll.: $\operatorname{Ker}\varphi \leq V$, $\operatorname{Im}\varphi \leq W$.

Biz.: $v_1, v_2 \in \operatorname{Ker}\varphi \Rightarrow \varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = 0 + 0 = 0$.

$\varphi(\lambda v_1) = \lambda \varphi(v_1) = \lambda \cdot 0 = 0$. $\operatorname{Im}\varphi \leq W$ hasonló. $\square$

Áll.: $\operatorname{Im}\varphi = W \Leftrightarrow \varphi$ szürjektív. $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\} \Leftrightarrow \varphi$ injektív

Biz.: Im ✓.

$\boxed{\Rightarrow}$ $\varphi(v_1) = \varphi(v_2) \Rightarrow \varphi(v_1 - v_2) = 0 \Rightarrow v_1 - v_2 = 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\varphi(v) = \varphi(0) = 0$. $v \neq 0$.

Tétel: $\dim V < \infty \Rightarrow \dim \operatorname{Ker}\varphi + \dim \operatorname{Im}\varphi = \dim V$.

Biz.: $\exists$ $b_1, \dots, b_n$ bázis $\operatorname{Ker}\varphi$-ben.

Kieg. $a_1, \dots, a_k$-val V bázisává.

Elég: $\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_k)$ bázis $\operatorname{Im}\varphi$-ben.

gr.rdt: $\varphi(v) \in \operatorname{Im}\varphi$. $v = \beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n + \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k$

$\varphi(v) = \underbrace{\beta_1 \varphi(b_1) + \dots + \beta_n \varphi(b_n)}_{=0} + \alpha_1 \varphi(a_1) + \dots + \alpha_k \varphi(a_k)$ ✓

lin. ftlen: $\alpha_1 \varphi(a_1) + \dots + \alpha_k \varphi(a_k) = 0$

$\varphi(\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k) = 0$

$\Rightarrow \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k \in \operatorname{Ker}\varphi$

$= \beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n \Rightarrow \alpha_1 = \dots = 0$.

Def.: $\varphi: V \to W$ izomorfizmus, ha bijektív.

$V \simeq W \Leftrightarrow \exists \varphi: V \to W$ izom.

Áll.: V, W vég. dim: $V \simeq W \Leftrightarrow \dim V = \dim W$

Biz.: $\boxed{\Rightarrow}$: dim. tétel.

$\boxed{\Leftarrow}$ $b_1, \dots, b_n$ bázis V-ben
$a_1, \dots, a_n$ -\|\|- W-ben $\Rightarrow \exists! \varphi: \varphi(b_i) = a_i$.

10.

Def.: $U \leq V$ altér, $v \in V$. $v+U=\{v+u \mid u \in U\}$ halm.

U egy mellékosztálya, $w \in v+U$: reprezentáns.

Áll.: (1) $v \in v+U$. (2) $v+U=w+U$ vagy $v+U \cap w+U$

Biz.: (1) $v=v+0 \in v+U$.

(2) Tfh. $v+U \cap w+U \neq \emptyset \Rightarrow \exists u_1, u_2 \in U$:

$$v+u_1=w+u_2$$

$$\Rightarrow v+u=w+(u_2-u_1+u) \in w+U$$

$\Rightarrow v+U \subseteq w+U$. Hasonlóan $w+U \subseteq v+U$. □

Köv.: $v \sim w \iff v+U = w+U$ egy ekviv. rel.

$v-w \in U$.

Def.: V/U faktortér elemei: $v+U$ mellékosztályok

$$(v+U)+(w+U):=(v+w)+U$$

$$\lambda(v+U):=\lambda v+U$$

$\boxed{\text{3. előadás!}}$

Áll.: V/U vt.

Biz.: Kell: műveletek jóldef.-ak

$v_1+U=v_2+U$, $w_1+U=w_2+U$.

· $v_1+w_1+U=v_2+w_2+U$:

$v_1-v_2 \in U$, $w_1-w_2 \in U \Rightarrow (v_1-v_2)+(w_1-w_2)=(v_1+w_1)-(v_2+w_2) \in U$

$\lambda v_1+U=\lambda v_2+U$: $\lambda(v_1-v_2)=\lambda v_1-\lambda v_2 \in U$. □

Axiómák ✓

Def.: $\pi: V \to V/U$ kanonikus lin. lekép.

$\pi(v):=v+U$. **Áll.:** lineáris (triv).

$$\operatorname{Ker}\pi=U, \quad \operatorname{Im}\pi=V/U.$$

Köv.: $\dim U+\dim V/U=\dim V$.

Tétel (homomorfizmus-): $\varphi: V \to W$ lin. $\Rightarrow \operatorname{Im}\varphi \cong V/\operatorname{Ker}\varphi$

Biz.: $\tilde{\varphi}: V/\ker\varphi \to \operatorname{Im}\varphi$ izom.

$\tilde{\varphi}(v+U) := \varphi(v)$. Jóldef, lin., bij. □

Def.: $\operatorname{Hom}_K(V,W) := \{\varphi: V \to W \text{ lin. lek.}\}$

Áll.: $\operatorname{Hom}(V,W)$ vektortér a

$$(\varphi_1+\varphi_2)(v) := \varphi_1(v)+\varphi_2(v)$$

$$(\lambda\varphi_1)(v) := \lambda\cdot\varphi_1(v) \text{ műveletekkel.}$$

Biz.: világos. □ (endomorfizmusok -je)

$\operatorname{End}(V) := \operatorname{Hom}_K(V,V)$. gyűrű o-ra.

$V^* := \operatorname{Hom}_K(V,K)$: duális tér

Áll. $\dim \operatorname{Hom}(V,W) = \dim \operatorname{Hom} V \cdot \dim \operatorname{Hom} W$.

Biz.: $b_1,\dots,b_n$ bázis V-ben

$e_1,\dots,e_k$ –//– W-ben.

$$\varphi_{ij}(b_l) := \begin{cases} 0 & l \neq j \\ e_i & l = j. \end{cases}$$

Kell: $\{\varphi_{ij}\}_{i,j}$ bázis

gen.: $\varphi(b_j) = \sum_{i=1} a_{ij} e_i \in W$

$\Rightarrow \varphi = \sum_{i,j} a_{ij}\varphi_{ij}$, hiszen $\forall j$-re b_j-n megegyeznek.

lin. ftlen: $\sum_{i,j} a_{ij}\varphi_{ij} = 0 \Rightarrow \sum_{i,j} a_{ij}\varphi_{ij}(b_l) = 0$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{il} e_i = 0 \Rightarrow a_{il} = 0$ □

Def.: φ mátrixa a $\{b_1,\dots,b_n\}, \{e_1,\dots,e_k\}$ bázispa...

$A_\varphi = ((a_{ij}))$ $\qquad \varphi \longleftrightarrow A_\varphi$ bijektív lin. lekép...

j. oszlop: b_j képe $\qquad \operatorname{Hom}(V,W) \quad K^{k\times n}$ $\Rightarrow$ izom.

Köv.: $\dim V^* = \dim V \Rightarrow$ izomorfak. (függ a bázis választásától)

Kérdés: Mi a kompozíció képe ennél az azonosításnál?

12.

$$V \xrightarrow{\varphi} W \xrightarrow{\psi} U$$

$\{v_1, \dots, v_n\}$ $\{w_1, \dots, w_q\}$ $\{u_1, \dots, u_e\}$

$[\varphi] = A = ((a_{rj}))$ $[\psi] = B = ((b_{ir}))$

$$\psi \circ \varphi(v_j) = \psi\left(\sum_{r=1}^{q} a_{rj} w_r\right) = \sum_{r=1}^{q} a_{rj} \psi(w_r) =$$

$$= \sum_{r=1}^{q} a_{rj} \sum_{i=1}^{e} b_{ir} u_i$$

$$\psi \circ \varphi(v_j) = \dots \left(\sum_{r=1}^{q} b_{ir} a_{rj}\right) u_i$$

mátrix szorzás: $(BA)_{i,j}$

Köv.: új biz a mátrixszorzás asszociativitására.

Hogy függ a mátrix a bázistól?

$$V \xrightarrow{id_V} V \xrightarrow{\varphi} W \xrightarrow{id_W} W$$

$\{b_1', \dots, b_n'\}$ $\{b_1, \dots, b_n\}$ $\{e_1, \dots, e_n\}$ $\{e_1', \dots, e_n'\}$

S A_φ T^{-1}

A_φ'

$$A_\varphi' = T^{-1} A_\varphi S$$

$b_i' = \sum_{j=1}^{n} s_{ji} b_j$ $S = ((s_{ji}))_{j,i}$

$e_i' = \sum_{j=1}^{q} t_{ji} e_j$ $T = ((t_{ji}))_{j,i}$

S, T invertálható ✓

Duális tér és lin. leképezések:

$\varphi: V \longrightarrow W$ lin. lekép. $\Rightarrow$

$\varphi^*: W^* \longrightarrow V^*$ lin. leкép.: $f \in W^*$

$$\varphi^*(f)(v) := f(\varphi(v)).$$

lineáris leképezés

$V \simeq V^{**}$ természetesen: $v \longmapsto (f \longmapsto f(v$

Lin. trf.-k

$\varphi \in End_K(V)$.

Def.: $0 \neq v \in V$ sajátvektora φ-nek, ha $\exists \lambda \in K$ $\varphi(v) = \lambda v$. λ: sajátérték.

Def.: φ diag.-ható, ha $\exists \{v_1, \dots, v_n\}$ s.v.-ból álló bázis V-ben. □

Áll.: Sajátbázisban a mátrix diag.

Def.: $\lambda \in K$ s.é.-hez tart. s. altér:

$$V_\lambda := \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\}.$$

Áll.: Ez altér. (trivi.), sőt, invariáns altér: Def.: $\varphi(V_\lambda) \subseteq V_\lambda$.

Áll.: Ha $U \leq V$ invariáns altér, akkor

(1) $\varphi|_U : U \to U$ lin. lekép.

(2) $\tilde{\varphi} : V/U \to V/U$

$\tilde{\varphi}(v+U) := \varphi(v) + U$ lin. lekép.

Biz.: világos. □

Van-e sajátbázis? Egyáltalán s.v.? Le tudjuk olvasni a mátrixról?

$\varphi(v) = \lambda \cdot v \Rightarrow (A_\varphi - \lambda \cdot id) v = 0$ $v \neq 0$

$\Rightarrow \det(A_\varphi - \lambda I) \neq 0$.

Más bázis: $\det(S^{-1} A_\varphi S - \lambda I) = \det(S^{-1}(A_\varphi - \lambda I$

$= \det(A_\varphi - \lambda I)$.

Def.: $k_\varphi(x) := \det(A_\varphi - x\cdot I) \in K[x]$ a φ karakterisztikus polinomja. fok = dim

Áll.: $k_\varphi(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda$ s.é.-e φ-nek.

Biz.: $\boxed{\Leftarrow}$: láttuk.

$\boxed{\Rightarrow}$: $\det(A_\varphi - \lambda I) = 0 \Rightarrow (A_\varphi - \lambda I)v = 0$ homogén lin. egyt.-nek $\exists$ nemtriviális mo.-a.

Köv.: max $\dim V$ db. s.é. van.

Def.: $A \in K^{n\times n}$ nyoma: $\mathrm{Tr} A = \sum_{i=1} a_{ii}$.

Áll.: $((a_{ij}))$ $k_A(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} \mathrm{Tr} A\, x^{n-1} + \dots + \det$

Köv.: $\mathrm{Tr} A =$ s.é.-ek összege ($\mathbb{C}$ fölött pl.).

Biz.:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-x & & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{n1} & & a_{nn}-x \end{vmatrix}$$

x^{n-1} fokú tag: $n-1$ helyről $(-x)$, 1 helyről a_{ii}

Def.: $\dim V_\lambda :=$ a λ s.é. geometriai mult.-a

$k_\varphi(x) = (x-\lambda)^{m_\varphi} g(x)$ $(g(\lambda) \neq 0) \Rightarrow m_\lambda$: algebrai mult.

Áll.: $\dim V_\lambda \le m_\lambda$. **Biz.:** V_λ-ban $b_1, \dots, b_k$ bázis, $e_1, \dots, e_n$: kieg. V bázisává.

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} \lambda & 0 & \\ 0 & \lambda & X \\ \hline 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \end{array}\right)$$

a mátrix. Blokkmátrix det.-a. $\square$

Nem mindig $=$:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad k_A(x) = x^2$, de

$\mathrm{Ker}\, A = V_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ 1-dim.

[4. előadás]

Tétel: Kül. s.é.-hez tart. s.v.-k lin. ftlenek

Biz.: $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$, $\varphi(v_i) = \lambda_i v_i$ $(i=1,\ldots,k)$

$v_i \neq 0$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ páronként kül.

Teljes indukció: $k=1$ ✓. $(v_1 \neq 0)$.

Tfh.: $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = 0$ $\quad / \lambda_k$

$0 = \varphi\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_i v_i$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i(\lambda_i - \lambda_k) v_i = 0$

$\Rightarrow \alpha_i = 0 \quad (i=1,\ldots,k-1)$ $\square$

Köv 1: Ha $k_A(x)$ kül. gyöktényezők szorzata

$\Rightarrow$ A diag.-ható.

Köv 2: Sajátalterek összege mindig direkt.

Biz.: $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ kül. s.é.

Kell: $(V_{\lambda_1} + \ldots + V_{\lambda_{k-1}}) \cap V_{\lambda_i} = 0$

$v_1 + \ldots + v_{i-1} = v_i$ lin. ftlen. $\square$

A minimálpolinom

K test. Def.: R egy K-algebra, ha vt. /K és gyűrű, továbbá a szorzás K-lin. mindkét változóban:

$c(xy) = (cx) \cdot y = x \cdot (cy)$.

16.

R nem felt. komm!!!
Egységelemes, ha az.

Pl.: $R = K[x]$, $R = M_n(K)$. Vagy $\mathrm{End}_K(V)$.

Áll.: Ha $1 \in R \Rightarrow K \simeq \tilde{K} = K \cdot 1 \leq R$.
Sőt, $\tilde{K}$ $\forall$-nel felcserélhető. (részgyűrű)

Biz.: $(a \cdot 1) + (b \cdot 1) = (a+b) \cdot 1$
$(a \cdot 1)(b \cdot 1) = (a \cdot b) \cdot 1$
$x \cdot (a \cdot 1) = a \cdot (x \cdot 1) = (a \cdot x) \cdot 1 = (a \cdot 1) \cdot x$

$1 \in R$ K-alg. $r \in R \Rightarrow$ behelyettesítés

$\varphi_r : K[x] \longrightarrow R$ hom.
$\varphi_r(f(x)) := f(r)$

N.B.: R nemkomm., mégis értelmes $\varphi_r(fg) = \varphi_r(f)$
$\varphi_r(g$

Def.: $\varphi : S_1 \longrightarrow S_2$ gyűrűhom. magja
$\mathrm{Ker}\,\varphi = \{ s \in S_1 \mid \varphi(s) = 0 \}$.

Áll.: $s_1, s_2 \in \mathrm{Ker}\,\varphi$, $t \in S_1$
$\Rightarrow s_1 \pm s_2 \in \mathrm{Ker}\,\varphi$
$ts_1, s_1 t \in \mathrm{Ker}\,\varphi$.

Biz.: $\varphi(s_1 \pm s_2) = \varphi(s_1) \pm \varphi(s_2) = 0 \pm 0 = 0$ ✓
$\varphi(ts_1) = \varphi(t)\varphi(s_1) = \varphi(t) \cdot 0 = 0$ ✓ □

Def.: $I \subseteq S_1$ ideál, ha $+$-ra részcsop.
és $\forall\, a \in I$, $t \in S_1$ esetén $at, ta \in I$.

Jel.: $I \triangleleft S_1$.

Áll.: Ha $I \triangleleft K[x] \Rightarrow I$ egy polinom több-
öseiből áll. (1 elemmel generált ideál = főideál
$K[x]$: főideálgyűrű)

17.

Biz.: Ha $I = \{0\}$ => világos.
Egyébként: $p(x) \in I$ minimális fokú $\neq 0$.

$f(x) \in I$ $f(x) = \underbrace{p(x)}_{\in I} \underbrace{q(x)}_{\in I} + r(x)$

=> $r(x) \in I$. $\deg r < \deg p$.

=> $r(x) = 0$ $\square$

Def.: $0 \neq \ker \varphi_r \lhd K[x]$ normált generátoreleme:
$m_r(x)$: minimálpolinom. Ha $\ker \varphi_r = \{0\}$
r transzcendens, egyébként algebrai.

$A \in K^{n\times n}$ Kérdés: $\ker \varphi_A \neq 0$?

Áll.: $\dim_K R < \infty$ => $\forall r \in R$ algebrai
min. pol. foka $\leq \dim_K R = n$ $\square$

Biz.: $\underbrace{1, r, \dots, r^n}_{n+1 \text{ db}}$ lin. öf.

Köv.: $m_A(x)$ max. n^2 fokú.

Áll.: λ s.é.-e A-nak => $m_A(\lambda) = 0$.

Biz.: $0 \neq v$ λ-hoz s.v.

$m_A(A) = 0$ => $m_A(A) \cdot v = 0$.

$m_A(x) = a_0 + a_1 x + \dots + x^k$

=> $a_0 I + a_1 A + \dots + A^k = 0$

$a_0 v + a_1 A v + \dots + A^k v = 0$

$Av = \lambda v$, $A^2 v = A(\lambda v) = \lambda^2 v$ stb.

=> $(a_0 + a_1\lambda + \dots + \lambda^k) v = 0 \underset{v \neq 0}{=>} m_A(\lambda) = 0$

Tétel (Cayley-Hamilton) $A \in K^{n\times n}$ => $k_A(A) = 0$

Spec.: $m_A(x) \mid k_A(x)$.

Biz.: Lemma: $1 \in R$ komm. gyűrű, $M \in R^{n \times n}$

$$\Rightarrow \quad M\hat{M} = \hat{M}M = (\det M) \cdot \underset{\text{egységm.}}{I}$$

$$\hat{M} := \left((-1)^{i+j} \det M_{ji}\right)_{i,j}.$$

Biz.: Ferde kifejtési tétel $\square$

$$M := A - x \cdot I = \begin{pmatrix} a_{11}-x & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}-x \end{pmatrix} \in K[x]^{n \times n}$$

$k_A(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$

$$\Rightarrow \quad M \cdot \hat{M} = \det M \cdot I = k_A(x) \cdot I.$$

$$\hat{M} = B_0 + B_1 \cdot x + \ldots + B_{n-1} x^{n-1}$$

$$(A - xI)(B_0 + B_1 x + \ldots + B_{n-1} x^{n-1}) = a_0 I + a_1 I \cdot x + \ldots + a_n I x^n$$

x^j eh.-jának összehasonlítása:

$I \cdot /$ $\quad AB_0 = a_0 I$

$A \cdot /$ $\quad AB_1 - B_0 = a_1 I$

$\vdots$

$+ \; A^n \cdot /$ $\quad -B_{n-1} = a_n I$

$$0 = k_A(A) \qquad \square$$

Köv.: $m_A(x)$ gyökei pontosan a s.é.-ek.

Legyen $m_A(x) = p_1(x)^{\alpha_1} \cdots p_r(x)^{\alpha_r}$ irred.-ek szorzata. $\left\{ \dfrac{m_A(x)}{p_i(x)^{\alpha_i}} \right\}$ rel. primek.

$\Rightarrow \exists\, q_i(x) \in K[x]$, melyekre

19.

$$1=\sum_{i=1}^{n} q_i(x)\cdot\frac{m_A(x)}{p_i(x)^{\alpha_i}}=\sum_{j=1}^{n} h_j(x) \quad /\cdot h_j(x)$$

$$\Rightarrow h_j(x)\equiv h_j(x)^2 \; (m_A(x))$$

$m_i(x) \mid h_i(x)\,h_j(x)$ $\quad i\neq j$.

Áll.: $V=\bigoplus_{i=1}^{n} V_i$, ahol $V_i=\mathrm{Ker}(p_i(A)^{\alpha_i})$

Biz.: $v\in V$ $\quad v_i:=h_i(A)\cdot v$

$$\Rightarrow p_i(A)^{\alpha_i}v_i=p_i(A)^{\alpha_i}h_i(A)v=$$

$$=q_i(A)m_A(A)\cdot v=0.$$

$$\Rightarrow v_i\in \mathrm{Ker}(p_i(A)^{\alpha_i})=V_i.$$

$$Iv=\sum_{i=1}^{n} v_i=\left(\sum_{i=1}^{n} h_i(A)\right)v$$

Tfh. $(V_1+V_2+\dots+V_{i-1})\cap V_i\neq\{0\}$:

$$v_1+v_2+\dots+v_{i-1}=v_i\neq 0 \quad /\cdot h_i(A)$$

$$p_j(x)^{\alpha_j} \mid h_i(x) \quad i\neq j.$$

$$\Rightarrow h_i(A)v_j=0 \quad (i\neq j).$$

$$0=h_i(A)v_i=\left(I-\sum_{j\neq i} h_j(A)\right)v_i$$

$$=Iv_i-0=v_i \quad \square$$

Def.: $A\sim B$, ha $\exists\, S$ inv.-ható $S^{-1}AS=B$.
hasonló $\Leftrightarrow$ ugyanazt a lin. leképezést mátrixa más bázisban

Áll.: $A\sim B \Rightarrow m_A(x)=m_B(x)$.

Biz.: $f(A)=0 \Leftrightarrow S^{-1}f(A)S=0 \Leftrightarrow f(S^{-1}AS)=0$ $\square$

Kör.: A diag.-ható $\Leftrightarrow m_A(x)=(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_k)$
különböző

(20)

Biz.: $\boxed{\Rightarrow}$ Ilyen mátrixok min. pol.-ja az.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_1 & & \\ & & & \lambda_2 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

min. pol.-ja: $(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_n)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ $V=\bigoplus V_i$, $V_i=\mathrm{Ker}(A-\lambda_i I)$.

$v_i\in V_i \Rightarrow (A-\lambda_i I)v_i=0 \Rightarrow Av_i=\lambda_i v_i$

$\Rightarrow$ blokkmátrix, blokkok: $\begin{pmatrix} \lambda_i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix}$. $\square$

Áll.: $V=V_1\oplus V_2$ inv. altere $\Rightarrow A_\varphi = \begin{array}{c|c} V_1 & V_2 \end{array}$ $\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}\begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \end{array}$

blokkmátrix

Biz.: világos. $\square$ $K=\overline{K}$ (pl. $K=\mathbb{C}$).

$$m_\varphi(x)=\prod_{i=1}^{r}(x-\lambda_i)^{\alpha_i}$$

$$V_i=\mathrm{Ker}((A-\lambda_i I)^{\alpha_i})$$

$\Rightarrow V=\bigoplus V_i$. $\varphi|_{V_i}$ min. pol.-ja $(x-\lambda_i)^{\alpha_i}$

Tétel: Minden $\varphi\in\mathrm{Hom}_{\overline{K}}(V,V)$ alkalmas bázisban blokkmátrix

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ 1 & \ddots & \\ & 1 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

(Jordan-féle normálalak).

$$\begin{pmatrix} \lambda_n & & \\ 1 & \ddots & \\ & 1 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

λ_i-k nem feltétlenül különbözők.

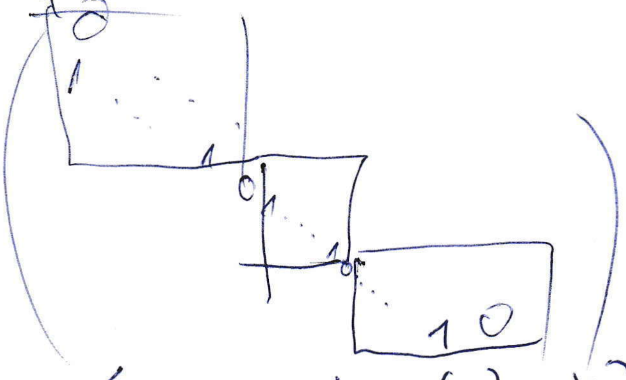
Biz.

$V_i = \operatorname{Ker}((A-\lambda_i I)^{\alpha_i})$ invariáns altér:

$$(A-\lambda_i I)^{\alpha_i} v = 0 \Rightarrow (A-\lambda_i I)^{\alpha_i} A v = A (A-\lambda_i I)^{\alpha_i} v = 0.$$

$\rightsquigarrow$ blokkmátrix. Tehát feltehetjük, hogy 1 db sé. van: λ. Sőt, λI-t levonva feltehetjük, hogy $\lambda = 0 \Rightarrow \varphi$ nilpotens.
$\Rightarrow \exists q \; \varphi^q = 0 \Rightarrow m_\varphi(x) = x^\ell \mid k_\varphi(x) \Rightarrow \varphi^n = 0$
$(n = \dim V)$

Kell: φ mátrixa alkalmas bázisban



alakú

Lemma 1 Legyen $m_\varphi(x) = x^r$ és $V_i := \operatorname{Ker} \varphi^i$.

$\Rightarrow 0 = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \dots \subsetneq V_r = V$.

Biz.: Tfh. $V_i = V_{i+1}$ $(i < r)$.

$\forall v \in V \; \varphi^r(v) = 0 \Rightarrow \varphi^{i+1}(\varphi^{r-i-1}(v)) = 0$.

$\varphi^{r-i-1}(v) \in \operatorname{Ker} \varphi^{i+1} = \operatorname{Ker} \varphi^i \Rightarrow \varphi^i(\varphi^{r-i-1}(v)) = \varphi^{r-1}(v)$ ↯.

Lemma 2: $a_1 + V_i, \dots, a_k + V_i \in V_{i+1}/V_i$ lin ftlen

$\Rightarrow \varphi(a_1) + V_{i-1}, \dots, \varphi(a_k) + V_{i-1} \in V_i/V_{i-1}$ lin ftlen

$$\bar{\varphi}: V_{i+1}/V_i \to V_i/V_{i-1}$$
$$v + V_i \mapsto \varphi(v) + V_{i-1}$$ injektív.

Biz.: $\bar{\varphi}$ injektív: $\varphi(v) \in \operatorname{Ker}\varphi^{i-1} \Rightarrow v \in \operatorname{Ker}\varphi^{i}$.

(jóldef.)

Tfh. $\sum_{j=1}^{q} \alpha_j \varphi(a_j) \in V_{i-1}$

$$\sum_{j=1}^{q} \alpha_j \varphi(a_j) = \varphi\left(\sum_{j=1}^{q} \alpha_j a_j\right) \Rightarrow \sum \alpha_j a_j \in V_i \Rightarrow \alpha_j = 0 \quad (j=1,\dots,q)$$ □

Lemma 3 $b_1,\dots,b_l \in U$ lin. ftlen, $a_1+U,\dots,a_q+U \in V/U$ lin. ftlen.

$\Rightarrow a_1,\dots,a_q, b_1,\dots,b_l$ ftlen.

Biz.: $$\sum_{i=1}^{q} \alpha_i a_i + \underbrace{\sum_{j=1}^{l} \beta_j b_j}_{\in U} = 0$$

$$\Rightarrow \sum \alpha_i a_i \in U \Rightarrow \sum \alpha_i (a_i + U) = 0$$

$\Rightarrow \alpha_i = 0 \ \forall i$

$\Rightarrow \forall j \ \beta_j = 0$. □

Tételbiz.:

$\varphi \downarrow$

B_1 (a_{1r})	$\leftarrow V_r/V_{r-1}$			
$\varphi(a_{1r})$ $\varphi(B_1)$	B_2	$\leftarrow V_{r-1}/V_{r-2}$		
$\varphi^2(a_{1r})$ $\varphi^2(B_1)$	$\varphi(B_2)$	B_3		
.				
$\varphi^r(B_1)$	$\varphi^{r-1}(B_2)$			B_r

$B_1, \varphi(B_1), \dots, \varphi^r(B_1), B_2, \varphi(B_2), \dots, \varphi^{r-1}(B_2), \dots, B_r$ bázis V-ben. lin ftlen: Lemma

drva ✓

(23.)

Egyértelműség:

Elég belátni nilpotens lin. trf.-ra. (V_i-k egyértelműek)

Áll.: φ nilp. lin. trf. n_k a $k\times k$-as blokkok száma

$\Rightarrow n_k = 2\dim V_k - V_{k-1} - V_{k+1}$.

Biz.: $\operatorname{Ker}\varphi^k = V_k$ dimenziója:

$$\dim V_k = \sum_{j=1}^{k} j n_j + k n_{k+1} + \ldots + k n_r$$

valóban, egy $i\times i$-es blokkban $\min(k,i)$-dim.-s $\operatorname{Ker}\varphi^k$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 \cdots & 3 \\ & & \ddots & \\ 1 & & & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ n_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dim V_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dim V_r \end{pmatrix}$$

inverze: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\square$

$\Rightarrow n_k$ egyértelmű.

Jordan-féle ~~normálalak~~ hatványozása

$$\begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I + N \quad N = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

24.

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 0 & \ddots & & 0 \\ 1 & & \ddots & \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1\,0\,0 & \end{pmatrix}, \quad N^i = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1\,0\,0 & \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow (\lambda I + N)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (\lambda I)^{k-i} N^i$$

$$\begin{pmatrix} \lambda^k & & & \\ k\lambda^{k-1} & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ \binom{k}{n-1}\lambda^{k-n+1} & \cdots & k\lambda^{k-1} & \lambda^k \end{pmatrix}$$

i-edik derivált az (i+

edik mellékátlóban.

Bilineáris fv.-ek

Duális bázis: $Hom(V, K) = V^*$ (duális tér)

$\{b_1, \dots, b_n\}$ bázis V-ben

$$f_i(b_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}.$$

$f_1, \dots, f_n$ bázis V^*-ban. duális bázis.

Def.: V vt. $/K$.

$$\beta : V \times V \to K$$

mindkét vált.-ban lin. fv.-t bilineáris fv-nek nevezünk.

$$\beta(u_1 + u_2, v) = \beta(u_1, v) + \beta(u_2, v)$$

$$\beta(\lambda u, v) = \lambda \beta(u, v) = \beta(u, \lambda v).$$

$$\beta(u, v_1 + v_2) = \beta(u, v_1) + \beta(u, v_2)$$

Pl.: skaláris ~~szorz~~, tehetetlenségi nyomaték.

25.

<u>Áll.:</u> β-hoz egyértelműen hozzárendelhetü
<u>egy</u>

$$\tilde{\beta} : V \to V^* \quad \text{lin. leképezést}$$

<u>Biz.:</u> $\tilde{\beta}(v) \in V^*$ $\quad \tilde{\beta}(v)(u) := \beta(u,v)$.

$\tilde{\beta}$ lineáris, hiszen lineáris u-ban, hiszen β lin. v-ben.

visszafelé $\tilde{\beta} : V \to V^* \Rightarrow \beta(u,v) := \tilde{\beta}(v)(u)$

$$\mathrm{Bilin}(V \times V, K) \simeq \mathrm{Hom}_K(V, V^*)$$

β mátrixa: Vegyünk V-ben egy $b_1, \dots, b_n$ bázist $\rightsquigarrow f_1, \dots, f_n$ V^*-ban a duális bázis

β ~~[illegible]~~ mátrixa: $\tilde{\beta}$ mátrixa ebben a bázispárban (B)

<u>Áll.:</u>

$$B = ((\beta(b_i, b_j)))_{i,j}.$$

<u>Biz.:</u> $B = ((c_{ij}))_{i,j}$

$$\tilde{\beta}(b_j) = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} f_i .$$

$$\Rightarrow \tilde{\beta}(b_i, b_j) = \tilde{\beta}(b_j)(b_i) = \sum_{k=1}^{n} c_{kj} f_k(b_i) = c_{ij} \qquad \square$$

Speciálisan a mátrix meghatározza β-t:

$$\beta\left(\sum_{i=1}^{n} x_i b_i, \sum_{j=1}^{n} y_j b_j\right) = (x_1, \dots, x_n)\, B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

(26)

Áttérés más bázisra

$S = ((s_{ij}))$ $\qquad b'_j = \sum_{i=1}^{n} s_{ij} b_i$

$$V \xrightarrow{id} V \xrightarrow{\tilde{\beta}} V^* \xrightarrow{id} V^*$$

$b'_1, \dots, b'_n \quad S \quad b_1, \dots, b_n \quad \beta \quad f_1, \dots, f_n \quad ? \quad f'_1, \dots, f'_n$

$$f_j(b'_i) = f_j\left(\sum_{k=1}^{n} s_{ki} b_k\right) = s_{ji}$$

$$\Rightarrow f_j = \sum_{i=1}^{n} s_{ji} f'_i \qquad ? = S^T$$

$$\boxed{[\beta]' = S^T [\beta] S}$$

[6. előadás]

$$\det[\beta]' = (\det S)^2 \cdot \det[\beta].$$

$$\det \beta \in K^\times / (K^\times)^2 \cup \{0\}.$$

β-hoz tartozó kvadratikus alak

$$q_\beta(v) := \beta(v, v).$$

$$\bar{\beta}(u, v) := \beta(v, u) \Rightarrow q_\beta = q_{\bar{\beta}}$$

(tehát nem hat. meg a kv. alak a bilin. fv.-t).

Legyen viszont β szimmetrikus, azaz

$$\beta(u, v) = \beta(v, u).$$

Még mindig nem jó: $\mathbb{F}_2$ fölött: $[\beta] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow q(x_1 b_1 + x_2 b_2) = x_1 x_2 + x_2 x_1 = 0.$

__Tétel__ $\mathrm{char}\, K \neq 2 \overset{\beta \neq 0.}{\Rightarrow} q_\beta$ meghat. β-t. (β szimm.).

__Biz.:__ $\beta(u,v) = \dfrac{q(u+v) - q(u) - q(v)}{2}$. $\square$

__Def.__ β megint tetsz.:

$u \perp_\beta v \Leftrightarrow \beta(u,v) = 0.$

__Def.:__ β alternáló (szimplektikus), ha $\beta(u,u) = 0$ $\forall u \in V$.

__Def.:__ β <u>ferdén szimm.</u>, ha $\beta(u,v) = -\beta(v,u)$.

__Áll.:__ β alternáló $\Rightarrow$ ferdén szimm.

Ha $\mathrm{char}\, K \neq 2$, akkor $\Leftrightarrow$

__Biz.:__

$\boxed{\Rightarrow}$ $0 = \beta(x+y, x+y) = \cancel{\beta(x,x)} + \underline{\beta(x,y) + \beta(y,x)} + \beta(y,y)$

$\boxed{\Leftarrow}$ $\beta(x,x) = -\beta(x,x) \Rightarrow 2\beta(x,x) = 0$ $\overset{\mathrm{char}\, K \neq 2}{\Rightarrow} \beta(x,x)$

__Áll.:__ $\mathrm{char}\, K \neq 2 \Rightarrow \forall \beta$ egyért. felírhat $\beta_1 + \beta_2$ alakban, ahol β_1 szimm., β_2 ferdén szimm.

__Biz.:__ $\beta_1(x,y) = \dfrac{\beta(x,y) + \beta(y,x)}{2}$

$\beta_2(x,y) = \dfrac{\beta(x,y) - \beta(y,x)}{2}$ $\square$

HF $\perp_\beta$ szimm. $\Leftrightarrow$ β alt. v. szimm.

Áll.: β alternáló $\Rightarrow$ alkalmas bázisban $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ és 0 blokkokból álló blokkdiag. mátrix.

Biz.: Legyen u_1, v_1 olyan, hogy $\beta(u_1, v_1) = 1$.

Ha nincs $\Rightarrow \beta \equiv 0$, hiszen $\beta(u, v) = c \neq 0$ esetén $u_1 = u$, $v_1 = c^{-1} v$ jó.

$\Rightarrow \beta(v_1, u_1) = -\beta(u_1, v_1) = -1$.

$\beta(u_1, u_1) = \beta(v_1, v_1) = 0$ (alternáló).

Indukció $\dim V$ szerint. $U_1 := \langle u_1, v_1 \rangle$.

$U_1^\perp = \{ v \in V \mid \beta(u, v) = 0 \ \forall u \in U_1 \}$.

alter. ✓

Lemma: $V = U_1 \oplus U_1^\perp$.

Biz.: Tfh. $x u_1 + y v_1 \in U_1 \cap U_1^\perp$

$\Rightarrow 0 = \beta(u_1, x u_1 + y v_1) = y$

$0 = \beta(v_1, x u_1 + y v_1) = -x$ ✓.

$w \in V$ $\quad w = w_1 + w - w_1$, ahol

$w_1 = \beta(w, v_1) u_1 - \beta(w, u_1) v_1 \in U_1$.

$\beta(w_1, u_1) = \beta(w, u_1)$, $\beta(w_1, v_1) = \beta(w, v_1)$.

$\Rightarrow w - w_1 \perp u_1, v_1 \Rightarrow w - w_1 \in U_1^\perp$. $\square$

$\dim U_1^\perp < \dim V$, kész.

Def.: β nemelfajuló, ha $\det[\beta] \neq 0 \Leftrightarrow$

$\det[\hat{\beta}] \neq 0 \Leftrightarrow \ker \hat{\beta} = \{0\} \Leftrightarrow \forall u \in V$-re $\exists v$ $\beta(u, v) \neq 0$.

Köv.: Ps dim.-jú térben $\exists !$ alternáló nemelf bilin. fv., ptlan dim.-ban $\nexists$.

Áll.: char $K \neq 2$, β szimm. bilin. fv. $\Rightarrow$ alkalmas bázisban ~~...~~ diagonális.

Biz.: ~~...~~ Schmidt-féle ortogonalizációs eljárás

$\beta \not\equiv 0 \Rightarrow q \not\equiv 0 \Rightarrow \exists v \in V \quad q(v) \neq 0.$ $q(v) \overset{\shortparallel}{=} c$

Elég: $\langle v \rangle^{\perp} \oplus \langle v \rangle = V.$

$\langle v \rangle \cap \langle v \rangle^{\perp} = \{0\}$ világos, hiszen $\beta(v,v$

$w \in V$ akármi $\Rightarrow w = w_1 + (w - w_1)$

$$w_1 = \frac{\beta(w,v)}{\beta(v,v)} \cdot v \in \langle v \rangle. \qquad \square$$

Rang: diag.-ban a $\neq 0$ elemek száma $= [\beta]$ rangja $\Rightarrow$ nem függ a bázis választásától.

Hány (nemelfajuló) szimm. bilin. fv. van

Ha $K = \overline{K}$ alg. zárt $\Rightarrow$ 1 db.

$K = \mathbb{Q} \Rightarrow$ végtelen sok, hiszen $\det[\beta] \in \mathbb{Q}^{\times}/(\mathbb{Q}$ invari

$K = \mathbb{F}_p$: kettő (gyakorlaton).

$K = \mathbb{R}$:

Tétel (Sylvester-féle tehetetlenségi)

β szimm. bilin. fv. $\Rightarrow$ β alkalmas bázisban diag., ~~...~~ a főátlóban $0, \pm 1$-ek vannak. A $+$, $-$, ill. 0-k száma nem függ a bázistól

30.

Biz.: $\neq 0$ elemek száma: rang.

$\mathrm{rad}(\beta) := \mathrm{Ker}(\hat{\beta}) = \{ u \in V \mid \beta(u,v) = 0 \ \forall v \in V \}$.

$$\bar{\beta} : V/\mathrm{rad}(\beta) \times V/\mathrm{rad}(\beta) \to \mathbb{R}$$

$$(u + \mathrm{rad}(\beta), (v + \mathrm{rad}(\beta)) \mapsto \beta(u,v)$$

jóldef, bilin. nemelf. $\Rightarrow$

feltehetjük, hogy β nemelf.

$\exists$: világos (Gram-Schmidt, $\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}$, ha λ van a főátlóban).

Egyértelműség:

$\underbrace{b_1, \dots, b_p}_{\text{poz.}}, \underbrace{\dots b_n}_{\text{neg.}}$ két bázis

$\underbrace{e_1, \dots, e_q}_{\text{poz}}, \underbrace{\dots e_n}_{\text{neg.}}$

$U := \langle b_1, \dots, b_p \rangle$, $W := \langle e_{q+1}, \dots, e_n \rangle$

$0 \neq u \in U \Rightarrow \beta(u,u) > 0$

$0 \neq w \in W \Rightarrow \beta(w,w) < 0$.

$\Rightarrow U \cap W = \{0\} \Rightarrow p + (n-q) \leq n$

$\Rightarrow p \leq q$. Hasonl. $q \leq p$. $\square$

$\mathbb{F}_p$ felett:

Lemma: ~~x^2+y^2~~ $ax^2 + by^2 = c \quad \forall a, b \neq 0$ esetén megoldható $\mathbb{F}_p$-ben.

Biz.: $|\{ax^2\}| = |\{c - by^2\}| = \frac{p+1}{2}$, tehát $\exists \cap$. $\square$

Köv.: $\mathbb{F}_p$ fölött (31) pontosan 2 db nemekv. alak van. (det = kv. maradék, ill. nemmarad

Biz.: Diagonalizáljuk, a lemma miatt az $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ blokk átalakítható úgy, hogy a bal felső 1-es legyen. det mod $(\mathbb{F}_p^*)^2$ i

$\boxed{\text{7. előadás}}$

Def. $\mathbb{R}$ fölötti β szimm. bilin. fv. Φ

pozitív definit $\beta(v,v) > 0$ $(v \neq 0)$

— // szemi —//— $\beta(v,v) \geq 0$.

neg. def. $\beta(v,v) < 0$ $(v \neq 0)$

neg. szemidef. $\beta(v,v) \leq 0$.

indefinit: fentiek közül egyik sem

Tétel β poz. def. $\Leftrightarrow$ mátrixának bal felső $k \times k$-as aldet.-a > 0 $\forall$ $1 \leq k \leq$

Biz.: Ortogonalizációnál az áttérési mátrix választható $S = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ alakúnak. valóban az új bázisvektort csak az előzőekkel módosítjuk $\Rightarrow \langle b_1, \dots, b_k \rangle = \langle e_1, \dots, e_k \rangle \Rightarrow$ det. ezen az altéren nem változik $\Rightarrow$ végén poz., ezért elején is. $\square$

Köv.: neg. def. $\Leftrightarrow$ $k \times k$-as főminor el. jele $(-1)^k$.

Biz.: β neg. $\Leftrightarrow$ $-\beta$ poz. $\square$

Komplex test felett

β bilin. $\Rightarrow$ nem lehet poz. def.:

$$\beta(iv, iv) = i^2 \beta(v,v) = -\beta(v,v)$$

Ezért: Egyik (első) vált.-ban konj.-

β másfélelineáris (sesqui lin.

komplex bilin.)

ha $\beta(\lambda u, v) = \overline{\lambda}\, \beta(u,v)$

$\beta(u, \lambda v) = \lambda\, \beta(u,v)$.

$\beta(u_1 + u_2, v) = \beta(u_1, v) + \beta(u_2, v)$

$\beta(u, v_1 + v_2) = \beta(u, v_1) + \beta(u, v_2)$.

$$\Rightarrow \beta\left(\sum_{i=1}^{n} x_i b_i, \sum_{j=1}^{n} y_j b_j\right) = \sum_{i,j} \overline{x_i}\, y_j\, \beta(b_i, b_j)$$

$$[\beta] = \left(\left(\beta(b_i, b_j)\right)\right)_{i,j}$$

$$\beta\left(\sum_i x_i b_i, \sum_j y_j b_j\right) = \overline{[x]}^T [\beta]\, y.$$

<u>Def.</u>: $\overline{}^T : {}^*$

$A^* = \overline{A}^T$ <u>adjungált mátrix</u>.

<u>Áttérési mátrix</u>: $[\beta]' = S^* [\beta] S$

$q(v) := \beta(v,v)$

<u>Tétel</u> $\mathbb{C}$ fölött a kv. alak egyért. meghat. a másfélelin. fv.-t. (Nem kell szimm.-nak lennie!)

33.

Biz.: $\beta(u,v) = \dfrac{q(u+v) - i q(u+iv) - q(u-v) + i\ldots}{4}$

NB.: szimm. nem lehet: $\lambda\beta(u,v) = \beta(\lambda u, v) = \beta(v, \ldots$
$= \bar{\lambda}\beta(\ldots$

Konjugálni kell!

Def.: β Hermite-féle, ha $\beta(u,v) = \overline{\beta(v,u)}$.

Áll.: Ekviv.: (1) β Hermite-féle

(2) $[\beta]^* = [\beta]$ valamilyen bázisban

(3) $[\beta]^* = [\beta]$ minden bázisban.

Biz.: (1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2) trivi.

(2) $\Rightarrow$ (1):

$$\overline{\beta(v,u)} = \overline{[v]^*[\beta][u]}$$

$$\beta(u,v) = [u]^*[\beta][v] \underset{1\text{-szer } 1\text{-es}}{=}$$

$$= \left([u]^*[\beta][v]\right)^* =$$

$$= [v]^*[\beta]^*[u] = [v]^*[\beta][u]$$

Tétel: β Hermite-féle $\Leftrightarrow$ $\beta(v,v) \in \mathbb{R}$ $\forall v$

Biz.: $\boxed{\Rightarrow}$ $\beta(v,v) = \overline{\beta(v,v)} \Rightarrow \in \mathbb{R}$

$\boxed{\Leftarrow}$ kvadr. alak meghat. β-t. $\|$

$\perp_\beta$ szimmetrikus rel. $\mid$ β Hermite-féle

34.

Ortogonális bázis, Schmidt-féle ort. eljá-
Sylv.-féle teh. tétel, poz. def. jell. alá
-kkal: mint $\mathbb{R}$ fölött.

$\mathcal{B}$ mátrixa: önadjungált: $A^* = A$.

Áll: $A^* = A \Rightarrow \det A \in \mathbb{R}$.

Biz.: $\det A = \det A^* = \det \bar{A}^T = \det \bar{A} = \overline{\det A}$

Euklideszi terek

Alaptest: $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$, V (végesdim.) vt.,
$(\cdot,\cdot)$ szimm. (Hermite-féle) poz. def.
bilin. fv.-t. $\rightsquigarrow$ "skaláris szorzás"

V euklideszi tér

$(V, +, \cdot, (\cdot,\cdot))$ $\|v\| := \sqrt{(v,v)}$ (hossz / norm

Def.: $b_1, \dots, b_n$ ONB, ha

$$(b_i, b_j) = \delta_{ij} \quad \text{(Kronecker)}.$$

Áll.: $\exists$ ONB. Biz.: hosszal leosztunk.

Köv.: bármely 2 n-dim eukl. tér izom

(ugyanaz az alaptest).

Áll.: $U \leq V \Rightarrow U \oplus U^\perp = V$.

Biz.: $u \in U \cap U^\perp \Rightarrow (u,u) = 0 \to u =$

$b_1, \dots, b_r$ ONB U-ban.

$$w := v - \sum_{i=1}^{r} (b_i, v)\, b_i$$

$w \in U^\perp$. $(b_j, w) = (b_j, v) - \sum (b_j, (b_i, v) b_i) =$
$= (b_j, v) - (b_j, v) = 0$.

Mj.: ∞-dim.-ban nem igaz (kell: zárt altér...) $\ell_2 = \{(a_1, \dots) \in \mathbb{R}^{\aleph_0} \mid \sum a_i^2 < \infty\}$

$$(a, b) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i . \qquad U := \text{véges sor} \neq 0.$$

$$U^{\perp} = \{0\}. \ (\text{ok: } U \leq_{\ell_2} \text{sűrű.})$$

Köv.: $U \leq V$ ONB-je kieg.-ható V ONB-jé

Tétel (CBS) $a, b \in V$ eMRl. tér $\Rightarrow$

$$|(a, b)| \leq \|a\| \cdot \|b\| . \text{ és } = \text{ acsa, ha } a, b \text{ lin. öf.}$$

Biz.: Mj: $\langle a, b \rangle =: U \leq 2$-dim. altér. $\Rightarrow U \simeq \mathbb{R}^2, \mathbb{C}^2$ (v. $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^0, \mathbb{C}^1, \mathbb{C}^0$)

$a = 0 \Rightarrow$ $\forall$ két o. $= 0$. $a \neq 0$.

$$\Rightarrow \lambda := -\frac{(a, b)}{(a, a)} \Rightarrow (a, \lambda a + b) = 0.$$

$$0 \leq (\lambda a + b, \lambda a + b) = \bar{\lambda} \cancel{(a, \lambda a + b)} + (b, \lambda a + b) =$$

$$= \lambda (b, a) + (b, b) = \lambda \overline{(a, b)} + (b, b).$$

$$0 \leq -\frac{(a, b) \cdot \overline{(a, b)}}{(a, a)} + (b, b) \qquad (a, a) >$$

$$|(a, b)|^2 \leq (a, a) \cdot (b, b) \qquad \sqrt{\dots} \qquad \square$$

$= \Leftrightarrow \lambda a + b = 0. \Leftrightarrow a, b$ lin. öf.

Mj.: ∞-dim-ban is működik.

36.

Def.: a és b szöge $\arccos \frac{(a,b)}{\|a\|\|b\|} \in [0, \pi]$

Tétel (Δ-egyenlőtlenség)

$a, b \in V$ eukl. tér $\Rightarrow \|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$.

Biz.: $(a,b) + (b,a) = (a,b) + \overline{(a,b)} = 2\,\mathrm{Re}\,(a,b)$

$\leq 2|(a,b)| \overset{CBS}{\leq} 2\|a\|\,\|b\|$

$\Rightarrow \underbrace{\|a\|^2 + \|b\|^2 + (a,b) + (b,a)}_{\underset{\|a+b\|^2}{=}\ (a+b,\, a+b) =} \leq (\|a\| + \|b\|)^2$ $\square$

Áll: $v \in V$, $b_1, \ldots, b_n$ ONB

$\Rightarrow v = \sum_{i=1}^{n} (b_i, v)\, b_i$.

Biz.: Valóban: $v = \sum_i \lambda_i b_i \Rightarrow (b_j, v) = (b_j, \sum \lambda_i b_i) = \sum_i \lambda_j \delta_{ij} = \lambda_j$.

Spec.: $\varphi: V \to V$ lin. trf.

$\varphi(b_j)$ koord.: $(b_i, \varphi(b_j))$

mátrixa $((b_i, \varphi(b_j)))_{i,j} \in \mathbb{C}^{n \times n}$

Def.: $\varphi: V \to V$ lin. trf. V eukl. tér

$v \in V$ $u \mapsto (v, \varphi(u))$ lin. lekép. u-ban

$V \to K$

$\Rightarrow \exists!\ \varphi^*(v) \in V$, melyre $(\varphi^*(v), u) = (v, \varphi(u))$

$\varphi^*: V \to V$: adjungált lin. lekép.

Áll.: $\varphi: V \to V$ lineáris

37.

Def.: φ normális $\Leftrightarrow$ $\varphi\varphi^* = \varphi^*\varphi$.

Biz.: $\bar{\lambda}(v, \varphi(u)) = \bar{\lambda}(\varphi(v), u) = (\lambda v, \varphi(u)) = (\varphi^*(\lambda v), u)$

φ önadjungált $\Leftrightarrow$ $\varphi^* = \varphi$

φ unitér $\Leftrightarrow$ $\varphi^* = \varphi^{-1}$

(valósban: ortogonális)

Áll.: $(\varphi^*)^* = \varphi$ Biz.: $(v, \varphi(u)) = (\varphi^*(v), u)$

$\Rightarrow (\varphi(u), v) = (u, \varphi^*(v))$

Áll.: φ unitér $\Leftrightarrow$ ONB-t ONB-be visz.

Biz.: $\boxed{\Rightarrow}$ $(\varphi(b_i), \varphi(b_j)) = (\varphi^*\varphi(b_i), b_j) = (b_i, b_j) = \delta_{ij}$

$\Rightarrow \{\varphi(b_i) \mid i = 1, \dots, n\}$ is ONB.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\{b_i\}$, $\{\varphi(b_i)\}$ ONB.

$\Rightarrow (\varphi^*\varphi(b_i), b_j) = \delta_{ij} = (b_i, b_j)$

$\Rightarrow \varphi^*\varphi(b_i) - b_i \perp b_j \ \forall j$

$\Rightarrow \varphi^*\varphi(b_i) = b_i$ □

Köv.: A bázistranszformáció az a lin. trf. ONB-ből ONB-be

Biz.: $S^* = S^{-1}$. □ Ezra és a bilin. fv.-ek

Tétel: $\dim V = n < \infty$, $\varphi \in End(V)$ V eukl.

φ ONB-ben diagonalizálható $\Leftrightarrow$ φ normális

Biz.: $\boxed{\Rightarrow}$ Ebben az ONB-ben $[\varphi^*] = [\varphi]^*$ diagonális $\Rightarrow$ felcserélhetők.

$\boxed{\Leftarrow}$ Lemma1: $\varphi(v)=\lambda v \Rightarrow \varphi^*(v)=\bar\lambda v$, ha

$\boxed{\varphi \text{ normális}}$

Biz.: $\lambda=0$-ra: $\varphi(v)=0 \Rightarrow (\varphi(v),\varphi(v))$

$$0=(\varphi(v),\varphi(v))=(\varphi^*\varphi(v),v)\overset{\varphi^*\varphi\overset{!}{=}\varphi\varphi^*}{=}(\varphi\varphi^*(v),v)=$$

$$=(\varphi^*(v),\varphi^*(v)) \Rightarrow \varphi^*(v)=0.$$

λ általános: $(\varphi-\lambda id)^*=\varphi^*-\bar\lambda id$

$\varphi\varphi^*=\varphi^*\varphi \Rightarrow (\varphi-\lambda id)(\varphi^*-\bar\lambda id)=$

$=(\varphi^*-\bar\lambda id)(\varphi-\lambda id$

φ-nek λ s.é. $\Rightarrow (\varphi-\lambda id)$-nek a 0.

$\varphi(v)-\lambda v=0 \Rightarrow \varphi^*(v)-\bar\lambda v=0$ $\square$

Tételbiz: Teljes ind. n-re. $n=1$ ✓

φ-nek $\exists$ s.é.-e: λ_1, ehhez b_1 s.v., leosztjuk

a hosszával, hogy $\|b_1\|=1$ legyen.

$\Rightarrow$ φ-és φ^*-invariáns a $\langle b_1\rangle$ altér.

Lemma2 Ha $U\le V$ φ-inv. altér, akkor

$U^\perp$ φ^*-inv.

Biz.: $v\in U^\perp \Rightarrow (v,u)=0 \ \forall u\in U$-ra

$\Rightarrow (\varphi^*(v),u)=(v,\varphi(u))=0$, hiszen $\varphi(u)\in U$

$\Rightarrow \varphi^*(v)\in U^\perp$ $\square$

$U=\langle b_1\rangle \Rightarrow \dim U^\perp=n-1$, $(\varphi^*)^*=\varphi$ és φ^*-inv.

$\overset{\text{indukció}}{\Rightarrow}$ $U^\perp$-ban $\exists$ ONB, amiben φ diag $\Rightarrow$

b_1-gyel együtt ONB V-ben. $\square$

Áll: Ekvivalensek:

(1) $\varphi^* = \varphi^{-1}$

(2) $\forall u, v \in V: (\varphi(u), \varphi(v)) = (u, v)$.

(3) $\forall v \in V \quad \|\varphi(v)\| = \|v\|$

(4) φ ONB-t ONB-be visz.

(5) φ normális és $\forall$ s. é.-e 1 absz. értékű

(6) ONB-ben $[\varphi]$ unitér

Biz.: (1)$\Leftrightarrow$(4) volt. (1)$\Leftrightarrow$(6): ONB-ben $[\varphi^*] = [\varphi]^*$

(1)$\Rightarrow$(2): $(\varphi(u), \varphi(v)) = (\varphi^*\varphi(u), v) = (u, v)$.

(2)$\Rightarrow$(3) trivi.

(3)$\Rightarrow$(1): $(v, v) = (\varphi(v), \varphi(v)) = (\varphi^*\varphi(v), v) = (v, \varphi^*\varphi$

$(\varphi^*\varphi)^* = \varphi^*\varphi$

$\varphi^*\varphi$-hez tartozó kvadratikus alak = —||—

id-hez tart. kv.

$\Rightarrow \varphi^*\varphi = id$.

(1)$\Rightarrow$(5) normális ✓ $\varphi(v) = \lambda v \Rightarrow \varphi^*(v) = \bar{\lambda} v$

$\Rightarrow v = \varphi^*\varphi(v) = \bar{\lambda} \cdot \lambda \cdot v$

$\Rightarrow |\lambda|^2 = 1$ ✓ $\square$

(5)$\Rightarrow$(6) előző tétel.

Áll: Ekvivalensek:

(1) $\varphi^* = \varphi$

(2) $(\varphi(u), v) = (u, \varphi(v)) \quad \forall u, v$

(3) φ normális és $\forall$ s. é. valós.

(4) $[\varphi]$ ONB-ben önadjungált.

Biz.: (1)$\Leftrightarrow$(2) (def.) (1)$\Leftrightarrow$(4): ONB-ben $[\varphi]^* = [\varphi$

(1)$\Rightarrow$(3) $\varphi(v) = \lambda v \Rightarrow \underset{\varphi(v)}{\varphi^*(v)} = \bar{\lambda}(v) \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda}$.

(3)$\Rightarrow$(4) Tétel.

Tétel φ normális $\Leftrightarrow$ $\varphi = \varphi_1\varphi_2 = \varphi_2\varphi_1$ alakba írható, ahol φ_1 unitér, φ_2 önadj. ≥ 0 s.é.-ekkel

Biz.: $\boxed{\Leftarrow}$ ~~világos~~, hiszen ~~$\varphi_1\varphi_2 = \varphi_2\varphi_1 \Rightarrow$~~

világos: $\varphi_1\varphi_2 = \varphi_2\varphi_1 \Rightarrow$ ~~$\varphi_1^*\varphi_2^* = \varphi_2^*\varphi_1^*$~~

$$\varphi_1^*\varphi_2^* = (\varphi_2\varphi_1)^* = (\varphi_1\varphi_2)^* =$$

Node $\varphi_2^* = \varphi_2$, ezért $= \varphi_2^*\varphi_1^*$.

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_1^*$ felcserél

prént

$\Rightarrow \varphi_1\varphi_2$ normális.

$\boxed{\Rightarrow}$ φ normális $\Rightarrow$ diag.-ható ONB-ben, s.é. ab. értékét kiemeljük

Tétel Minden $\mathbb{R}$ fölötti ortogonális trf. alkalmas ~~blokkban~~ ONB-ben

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & \boxed{\begin{matrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

blokkmátri

Biz.: Hasonlóan, mint $\mathbb{C}$ felett normálisakra: indukció $\dim V$-re. Ha $\dim V = 1 \Rightarrow \pm 1$ ✓.

$\dim V = n$ ~~$\mathbb{C}$~~ $+\mathbb{R}$. $< n$-dim.-ban tudjuk.

Ha $\exists$ valós s.é. $\Rightarrow \pm 1$, hiszen φ unitér.

b_1 ± 1-hez tart. s.v. $\Rightarrow \langle b_1\rangle^{\perp}$ φ és φ^* invariáns. Indukció.

41.

Ha $\exists$ valós s. é. $\Rightarrow$ $\cos\alpha + i\sin\alpha$ ala[…]

(komplex) s. é. van $\Rightarrow$ $\cos\alpha - i\sin\alpha$ is

sajátérték $\boxed{1. \text{biz}}$ $\Longrightarrow$ $(x - \cos\alpha - i\sin\alpha)(x - \cos\alpha + i[\ldots]$

$= f(x) = (x-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha \in \mathbb{R}[\ldots]$

$\mathbb{R}$ felett irred. $f(x) \mid m_\varphi(x) \Rightarrow \exists v \neq 0$

$f(\varphi)v = 0.$

$\Rightarrow \langle v, \varphi(v) \rangle$ 2-dim in[…]

altér, amin. $[\varphi] = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

$\dim \langle v, \varphi(v) \rangle^\perp = n-2$ inv. altér.

$\boxed{2. \text{biz.}}$ Válasszunk egy ONB-t. ($\mathbb{R}$ fölött).

$\Rightarrow A = [\varphi] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $\quad A^T A = A A^T = I$.

$\Rightarrow$ A-nak $\exists$ $\mathbb{C}$ fölött ($\in \mathbb{C}^n$) s. v.-a.

Mivel $v = u + iw$, $u, w \in \mathbb{R}^n$ valós s. v. nincs, ezért, $u, w \in \mathbb{R}^n$ lin.

Valóban, ha $\alpha u + \beta w = 0 \Rightarrow$

$0 \neq (\alpha i + \beta)(u + iw) = \beta u - \alpha w + i(\alpha u + \beta w)$

$\Rightarrow \langle u, w \rangle_{\mathbb{R}}$ 2-dim. inv. altér, mely s. v.

~~u+iw~~ a mátrix $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

$\varphi(u) + i\varphi(w) = \varphi(u + iw) = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(u + iw) =$

$= (u\cos\alpha - w\sin\alpha) + i(u\sin\alpha + w\cos[\ldots]$

$\square$

Def.: $\varphi: V \to V$ lin. leróp. $\Rightarrow \beta(u,v) := (u, \varphi(v))$
egy bilin. (másfélllin.) leképezés. Ez egy b[ijekció]
$\beta \longleftrightarrow \varphi$.

φ önadjungált (szimmetrikus)
$\mathbb{R}$:

$\Longleftrightarrow \beta$ Hermite-féle
($\mathbb{R}$: szimm.)

Tétel (főtengelytétel) Euklideszi térben tetsz. Hermite-féle (szimm.) β bilin. fv.-hez v[an] β-ortogonális ONB. (azaz β és $(\cdot,\cdot)$ egyszerre diag.!)

Biz.: $[\beta] = [\varphi] \Rightarrow \varphi$ normális (önadj.) $\Rightarrow$ diag.-hat[ó] ONB.-ben. ebben β mátrixa, hiszen $S^* = S^{-1}$ mátrixa ugyanaz mint φ (hat a két bázistrf.)
Valós fölött: β szimm. $\Rightarrow [\varphi]$ szimm. $\Rightarrow$ s.é.-ek valósak $\Rightarrow$ s.v.-k választhatók $\mathbb{R}$-ben. $\square$

Köv.: β_1, β_2 Hermite-féle bilin. fv.-ek V-n. az egyik poz. definit $\Rightarrow \exists$ olyan báz[is] amiben mindkettő diag.

43

Miért nincs ezt főtengelytételnek?

$9x^2 + 4xy + 6y^2 = 100$ ellipszis egyenlete

bilin. forma mátrixa:

$$\begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

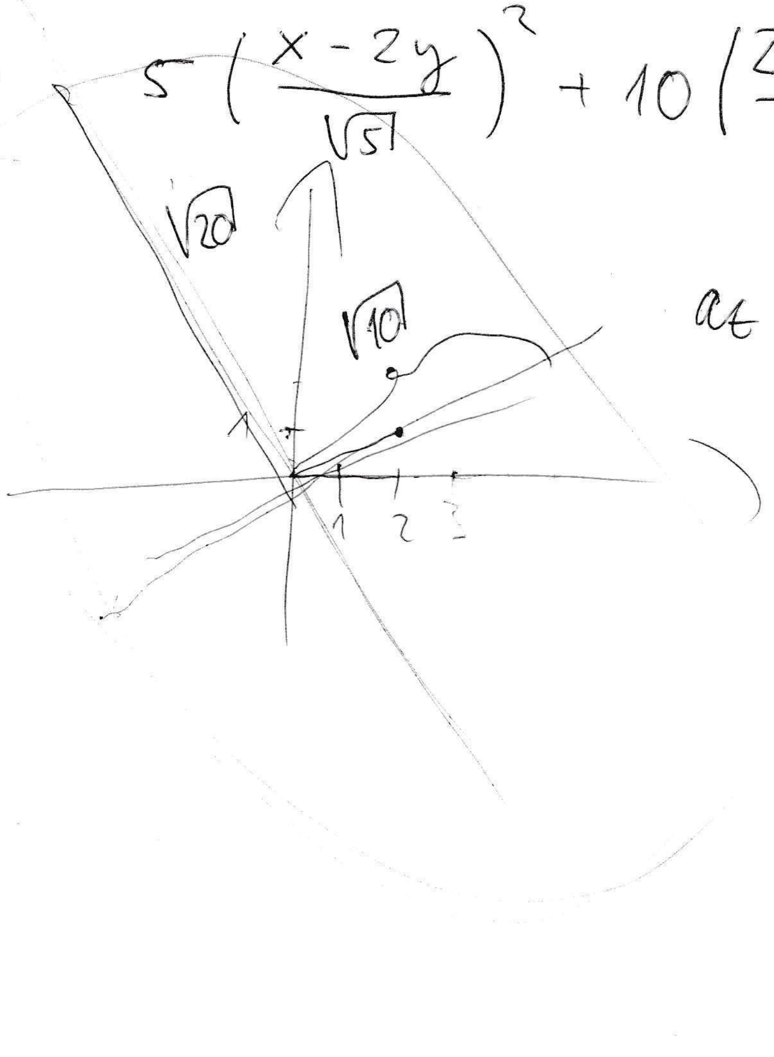
kar. pol.: $(9-\lambda)(6-\lambda)$
$= \lambda^2 - 15\lambda + 50$

$\lambda_{1,2} = 5$ és 10

sajátvektorok:

$5 \to \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ ill. $10 \to \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad 5\left(\frac{x-2y}{\sqrt{5}}\right)^2 + 10\left(\frac{2x+y}{\sqrt{5}}\right)^2 = 100$$



az ellipszis főtenge

Bilineáris leképezések klasszifikálása

Szeretnénk a bilin. fv.-eket (és ált. a többdim. térbe menő bilin. leképezéseket) valamilyen vektortérből menő lin. leképezések szerint klasszifikálni. U, V, W vektorterek

$$\beta: U\times V \to W \text{ bilineáris leképezés}$$

vt.

$$\beta(u_1+u_2, v) = \beta(u_1, v) + \beta(u_2, v)$$

$$\beta(\lambda u, v) = \lambda\beta(u, v) = \beta(u, \lambda v)$$

$$\beta(u, v_1+v_2) = \beta(u, v_1) + \beta(u, v_2).$$

U, V rögzített, W esetleg változik. Szeretnénk egy "univerzális" bilin. lekép.-t:

$$\beta_0: U\times V \to U\otimes V \to \text{vektortér}$$

hogy minden bilin.

$$\begin{tikzcd} U\times V \arrow[r, "\beta_0"] \arrow[dr, "\beta"'] & U\otimes V \arrow[d, dotted, "\varphi"] \\ & W \end{tikzcd} \qquad \varphi\circ\beta_0=\beta$$

U-ban $e_1,\dots,e_n$ bázis

V-ben $f_1,\dots,f_k$ –||–

$e_i\otimes f_j=\beta_0(e_i, f_j)$-k fogják generálni, ezek ftlenek: bilineáris leképezéseket elő lehet ezeken írni. Köv.: $n\times k$-dim. vt.

Bázisfüggetlen leírás:

~~Vegyünk a $\forall$ $u \in U$, $v\in V$-re~~

~~$\beta_0(u,v)$-t mint változót.~~

$\mathrm{Bilin}(U,V) := \{ \beta : U \times V \to K \mid \beta \text{ bilin.} \}$

$U \otimes V := \mathrm{Bilin}(U,V)^*$

$\Rightarrow (U \otimes V)^* \cong \mathrm{Bilin}(U,V)$

$$\beta : U \times V \to K$$

$$\rightsquigarrow \quad \tilde{\beta} : U \otimes V \to K \text{ lineár}$$

$\beta \longleftrightarrow \tilde{\beta}$ bijekció.

<u>$U \otimes V$ elemei:</u>

$u \in U,\ v \in V$

$$u \otimes v : \mathrm{Bilin}(U,V) \to K$$

$$\beta \longmapsto \beta(u,v) \in K$$

$u \otimes v$: elemi tenzor

$$(u_1 + u_2) \otimes v = u_1 \otimes v + u_2 \otimes v$$

$$u \otimes (v_1 + v_2) = u \otimes v_1 + u \otimes v_2$$

$$(\lambda u) \otimes v = \lambda \cdot u \otimes v = u \otimes (\lambda v).$$

Nem minden elem $U \otimes V$-ben elemi tenzor!

$e_1 \otimes f_1 + e_2 \otimes f_2$ pl. nem az!

Lehet ezt iterálni: $\beta\ V_1 \times \ldots \times V_k \to K$ multilin. fv. nem más, mint egy

$$V_1 \otimes_K V_2 \otimes \ldots \otimes_K V_k \to K \text{ lin. lekép.}$$

46.

sőt $\bigoplus_{q=0}^{\infty} V^{\otimes q}$ gyűrű: (vektortér => Abel-csop + -ra)

szorzás i tenzor:

$$\sum_{r=1}^{l} v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_{q_r}}$$

$$(v_1 \otimes \dots \otimes v_q)(u_1 \otimes \dots \otimes u_l) := v_1 \otimes \dots \otimes v_q \otimes u_1 \otimes \dots \otimes u_l.$$

$Sym^2(V) = ?$ szimmetrikus bilineáris fv.-ek (az összes helyett).

$$V \otimes V / (u \otimes v - v \otimes u)$$

$$Sym^q(V) = V \otimes \dots \otimes V / \sim$$

$a_1 \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_q \sim a_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes a_{\sigma(q)}$ $\forall \sigma \in S_q$ perm.

külső hatvány:

$$\Lambda^q(V) = V \otimes \dots \otimes V / \sim$$

$a_1 \otimes \dots \otimes a_q \sim (-1)^{I(\sigma)} a_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes a_{\sigma(q)}$

$a_1 \otimes \dots \otimes a_q$ mellékosztálya: $a_1 \wedge \dots \wedge a_q$

<u>Áll.:</u> $\dim V = n$, $e_1, \dots, e_n \in V$ bázis $\Rightarrow$

$Sym^q(V)$-ben bázis:

$$e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q} \quad 1 \le i_1 \le \dots \le i_q \le n$$

(ismétléses kombináció)

$\Lambda^q(V)$-ben bázis

$$e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_q} \quad (1 \le i_1 < i_2 < \dots$$

<u>Biz.:</u> <u>gen. mindkettő:</u> világos:

$e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q}$ bázis $V^{\otimes q}$-ban, és permutációval elérhető, hogy $i_1 \le \dots \le i_q$

Sőt, ha az e_i-k között van két egyenlő, akkor $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_q} = 0$ valóban

$$e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_q} = -e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_q}$$

(transzpozíció alapján).

<u>Lineárisan függetlenek:</u>

1\. $Sym^q(V)$ univerzális tulajdonságból!

Ugyanis lin. öf-k. Elég megadni egy $f: Sym^q(V) \to K$ lin. leképezést, amire $f(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q}) = 1$, de

$f(e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q}) = 0$, ha nem $i_r = j_r$ $\forall r \in \{1, \dots$

(48)

Most egy $f: \mathrm{Sym}^q(V) \to K$ lin. leképezésre

$$\beta: V \times \dots \times V \to K$$

$\beta = f \circ \beta_0$ egy multilin. szimm. leképezés.

Elég tehát $\beta: V \times \dots \times V \to K$

$$\beta(e_{i_1}, \dots, e_{i_q}) = 1$$

$$\beta(e_{j_1}, \dots, e_{j_q}) = 0.$$

$$\beta(v_1, \dots, v_q) := \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_q} \prod_{r=1}^{q} \alpha_{\sigma(r) i_r}$$

$$v_r = (\alpha_{r1}, \dots, \alpha_{rq})^T \in V$$

$$\alpha_{r1} e_1 + \dots + \alpha_{rn} e_n$$

(47.)

Számfogalom lezárása

A kvaterniók: $\mathbb{H} = \{a+bi+cj+dk \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$

$z = a+bi+cj+dk$

$+$: koordinátánként

szorzás: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$

$ij = -ji = k$

$ik = i(ij) = i^2 j = -j$

$ki = -jii = -ji^2 = j$

$jk = -jji = i, \quad kj = (ij)j = -i.$

Pl.: $(i+j)^2 = i^2 + ij + ji + j^2 = -1 + k - k - 1 = -2$

Áll.: $\mathbb{H}$ ferdetest (nemkommutatív, de $\exists$ inverz $\forall \neq 0$ kv.-nak)

Biz.: $\bar{z} := a - bi - cj - dk$ konjugált.

$N(z) = z\bar{z} = (a+bi+cj+dk)(a-bi-cj-dk) =$

$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \cancel{(ab - ba)}i + \cancel{(ac - ca)}j + \cancel{(ad - da)}k$

$\cancel{(cd + dc)}i \qquad \cancel{(bd - db)}j \qquad (-bc + cb)k$

> 0, ha $z \neq 0$.

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{N(z)} = \frac{a}{a^2+b^2+c^2+d^2} - \frac{b}{a^2+b^2+c^2+d^2}i - \frac{c}{a^2+b^2+c^2+d^2}j - \frac{d}{a^2+b^2+c^2+d^2}k$$

asszociativitás: számolás

disztributivitás

$\square$

Tétel (Frobenius) A vég. dim. ~~(egységelemes)~~ asszociatív 0-osztómentes algebra $\mathbb{R}$ fölött $\Rightarrow A = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ v.

Biz.: ~~Nem~~ Ezek nyilván jók. Legyen A ilyen.

Lemma: A ferdetest.

Biz.: $0 \neq \alpha \in A \Rightarrow \alpha : A \longrightarrow A$

$$x \longmapsto \alpha \cdot x$$

$\mathbb{R}$-lin. leképezés injektív / 0-osztómentes
$\Rightarrow$ szürjektív.

$\Rightarrow \alpha A = A \Rightarrow \exists\, e \in A : \alpha e = \alpha.$

$\Rightarrow e$ balegységelem: $\beta \in A$ tetsz.

$\alpha e \beta = \alpha \beta \Rightarrow \alpha(e\beta - \beta) = 0$

$\neq 0 \Rightarrow e\beta = \beta.$

Hasonlóan $\exists\, f$ jobbegységelem $\Rightarrow$

$1 := e = ef = f$ egységelem

$\forall \alpha \neq 0\ \exists\, \beta \quad \alpha\beta = 1 \Rightarrow \beta\alpha\beta = \beta$

$(\beta\alpha - 1)\beta = 0 \quad \beta \neq 0$

$\{a \cdot 1 \mid a \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \beta\alpha = 1.$ inverz.

részgyűrű, $\cong \mathbb{R}$.

azonosítjuk $\mathbb{R}$-rel. Ha $\mathbb{R} = A \Rightarrow$ kész

Ha nem $\Rightarrow \exists\, \alpha \in A \setminus \mathbb{R}$.

Nézzük a legszűkebb α-t tartalmazó részalgebrát! Ezek α $\mathbb{R}$-beli együtthatós polinomjai.

49

$1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^n, \ldots$ lin. öf.
($\dim_{\mathbb{R}} A < \infty$).

$\Rightarrow \exists_{0 \neq} m_\alpha(x) \in \mathbb{R}[x]$ minimálpol.

Áll: $m_\alpha(x)$ irreducibilis

Biz.: $m_\alpha(x) = f(x) g(x)$

$\Rightarrow 0 = m_\alpha(\alpha) = f(\alpha) g(\alpha)$

$\Rightarrow f(\alpha) = 0$ v. $g(\alpha) = 0$
(0-~~os~~osztómentes). □

$\mathbb{R}$ fölött csak 1 v. 2-fokú irred. pol. létez

$\Rightarrow \deg m_\alpha = 2$ ($\alpha \notin \mathbb{R}$).

$m_\alpha(x) = x^2 + px + q$, $p^2 - 4q < 0$

$\left(\alpha + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q < 0$

$i := \dfrac{\alpha + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \in \mathbb{R}[\alpha]$ $i^2 = -1$.

$\Rightarrow \mathbb{R}[\alpha] \simeq \mathbb{R}[i] \simeq \mathbb{C}$. Ha $\mathbb{C} = A$ kész

~~Ha~~ Tfh. nem. ~~legyen~~ ~~$\beta\in$~~

Legyen $N := \{\beta \in A \mid \beta^2 \in \mathbb{R}\ \beta^2 \leq 0\}$

Áll: $N \leq A$ altér. Biz.: $\left.\begin{array}{l}\lambda \in \mathbb{R}\\ \beta \in N\end{array}\right\} \Rightarrow (\lambda\beta)^2 = \lambda^2\beta^2$

$\Rightarrow \lambda\beta \in N$.

$0 \neq \beta_1, \beta_2 \in N \Rightarrow$ $\mathbb{R}[\beta_1 + \beta_2] \simeq \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$.
(beláttuk már, $\alpha \in A \setminus \mathbb{R}$ tetsz. v

$\Rightarrow (\beta_1 + \beta_2)^2 = a \cdot 1 + b(\beta_1 + \beta_2)$ $a, b \in \mathbb{R}$

$\|$

$\beta_1^2 + \beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_1 + \beta_2^2$

(50)

~~Mivel~~ ~~$1, \beta_1$~~ Tfh. $1, \beta_1, \beta_2$ lin. öf. $\mathbb{R}$ fölött.

$\Rightarrow$ pl. $\beta_2 \in \langle 1, \beta_1 \rangle_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{C}$ $(\beta_1^2 < 0)$

$\beta_2^2 < 0 \Rightarrow \beta_2 = u \cdot \beta_1$ $u \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \beta_1 + \beta_2 = (u+1)\beta_1$ ✓

Tehát tfh. $1, \beta_1, \beta_2$ lin. ftlen.

$\beta_1^2 + \beta_2^2 - \beta_1\beta_2 - \beta_2\beta_1 = (\beta_1 - \beta_2)^2 = c + d(\beta_1 - \beta_2)$ (hasonlóa

$0 \geq 2\beta_1^2 + 2\beta_2^2 = (\beta_1 + \beta_2)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2 =$

$= c + a + (b+d)\beta_1 + (b-$

$\Rightarrow b + d = b - d = 0 \Rightarrow b = d = 0$ $\in \mathbb{R}$

$(\beta_1 + \beta_2)^2 \leq 0.$ □

$\Rightarrow A = \mathbb{R} \oplus N$ (vt.)

valóban, ha $\alpha \in A \setminus \mathbb{R}$, akkor

$\mathbb{R}[\alpha] \simeq \mathbb{C} \Rightarrow \alpha = a + b\beta$ alak

ahol $\beta^2 = -1 \Rightarrow$

$a \in \mathbb{R}$ $b\beta \in N$.

N-en skalárszorzat:

kv. alak: $q(\beta) := -\beta^2 \in \mathbb{R}$

bilin. fv.: $u, v \in N$

$(u, v) := \dfrac{q(u+v) - q(u-v)}{4} =$

$= \dfrac{-(u^2 + uv + vu + v^2) + u^2 - uv - vu + v^2}{4}$

$= -\dfrac{uv + vu}{2}$

(51.)

(u,v) poz. def. szimm. bilin. fv.

$\dim_{\mathbb{R}} A > 2 \Rightarrow \dim N \geq 2 \Rightarrow i, j \in O$

$\Rightarrow i^2 = j^2 = -1, \quad ij + ji = 0 \quad (i,j) = 0.$

$i, j \neq 0 \Rightarrow ij =: k \neq 0.$

$ik = -j, \; jk = i, \; ki = j, \; kj = -i.$

$\Rightarrow (i,k) = (j,k) = 0$

$-(k,k) = k^2 = ijk = ii = -1. \Rightarrow i, j, k \in ONB.$

$\langle 1, i, j, k \rangle \simeq \mathbb{H}$. Tfh. $A \neq \mathbb{H}$.

$\Rightarrow \exists u \in N \setminus \langle i, j, k \rangle$

$u^2 = -1, \quad (u,i) = (u,j) = (u,k) = 0$

$\Rightarrow ku = -uk$

$ku = iju = -i(uj) = -(iu)j = +(ui)j = uk$

$\Rightarrow uk = 0$ ↯ $\square$

Node miért éppen $\mathbb{R}$?

$\mathbb{Z}$: világos, egész számok. $(\pm(1 + \ldots + 1))$.

$\mathbb{Q}$: –//– egészek hányadosai.

$\mathbb{R}$: Cauchy-sorozatok ekvivalenciaosztály

$(a_n)_n$ Cauchy, ha $\forall \varepsilon > 0$

$\exists N: \forall n, m \geq N \; |a_n - a_m| < \varepsilon$

Mi az az $|\,.\,|$ abszolútérték?

Lehetne másképp csinálni? Igen is, nem is.

Vannak más, hasonló testek?

Axiomatizáljuk! (52.)

K test. $|\cdot|_K \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ egy abszolútérték

(1) $|x| \geq 0$ és $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(2) $|xy| = |x| \cdot |y|$.

(3) $|x+y| \leq |x| + |y|$ (Δ-egyenlőtlenség)

Indukál K-n egy távolság-fogalmat (metrik

$\Rightarrow$ topológiát: nyílt gömb x kp.-tal: $\{y \mid |x-y| <$

Pl.: szokásos $|\cdot|_\infty$: $\mathbb{Q}$-n, $\mathbb{R}$-en, $\mathbb{C}$-n. triviális: $\forall x \neq 0$ $|x| =$

r sugarú

Def.: $|\cdot|_1$ és $|\cdot|_2$ ekvivalensek, ha ugyanazt a top.-t indukálják.

Áll.: $|\cdot|_1 \sim |\cdot|_2 \Leftrightarrow \exists\, s > 0$ valós, am

$$|x|_1 = |x|_2^s \quad \forall x \in K.$$

Biz.: $\boxed{\Leftarrow}$ triviális, $\Rightarrow$ $f(t) = t^s$ fv. folyton monoton nő.

$\boxed{\Rightarrow}$ $|x|_i < 1 \Leftrightarrow |x^n|_i \to 0$ $(n \to$

$\Leftrightarrow x^n \to 0$-hoz K-ban. $i = 1, 2$

$|\cdot|_1$ és $|\cdot|_2$ ekviv. $\Rightarrow$

$$|x|_1 < 1 \Leftrightarrow |x|_2 < 1.$$

$\frac{x}{y}$-ra $\Rightarrow |x|_1 < |y|_1 \Leftrightarrow |x|_2 < |y|_2$.

Ha $|\cdot|_1$ triviális, akkor $|\cdot|_2$ is és viszont

Tfh. tehát, hogy $\exists\, y$ $\quad |y|_1 > 1$.

$\Rightarrow |y|_2 > 1$

53.

Ezzor ~~$\exists$~~ $\exists s \in \mathbb{R}^{\geq 0}$, melyre
$\forall$ ~~$0 \neq x \in$~~ $\mathbb{R}$.

$$|y|_2 = |y|_1^s .$$

$0 \neq x \in K$ tetsz. $\Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}$

$$|x|_1 = |y|_1^\alpha .$$

$\frac{m_i}{n_i} \nearrow \alpha$

$$|x|_1 = |y|_1^\alpha > |y|_1^{\frac{m_i}{n_i}}$$

$$\Rightarrow |x|_1^{n_i} = |x^{n_i}|_1 > |y^{m_i}|_1$$

$$\Rightarrow |x^{n_i}|_2 > |y^{m_i}|_2 \Rightarrow |x|_2 > |y|_2^{\frac{m_i}{n_i}}$$

$$i \to \infty \Rightarrow |x|_2 \geq |y|_2^\alpha .$$

$$\frac{m_i}{n_i} \searrow \alpha \Rightarrow |x|_2 \leq |y|_2^\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{|x|_2}} = |y|_2^\alpha = |y|_1^{\alpha s} = \underline{\underline{|x|_1^s}} \quad \forall\, 0 \neq x \in K. \quad \square$$

① Mire jók a p-adikus számok?

Monsky: Egy négyzetet nem lehet páratlan sok egyenlő területű háromszögre bontani.
A $|\cdot|_2$ abszolútértéket kell kiterjeszteni $\mathbb{R}$-re. (Lehet!).

Diofantikus egyenletek:

Hasse–Minkowski: $f(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_k]$ egy ≤ 2 fokú polinom

$\Rightarrow f(x_1, \ldots, x_k) = 0$-nak pontosan akkor létezik $\mathbb{Q}$-ban megoldása, ha $\exists$ $\mathbb{R}$-ben és $\mathbb{Q}_p$-ben $\forall p$ prímre.

Pl.: $a_1 x_1^2 + \ldots + a_k x_k^2 = r$

$\rightarrow$ kvadratikus forma előállít-e egy $r \in \mathbb{Q}$ rac. számot.

$k \geq 4 \Rightarrow \mathbb{Q}_p$-ben mindig van előállítás

$r \geq 0$, $a_i \geq 0 \Rightarrow \mathbb{R}$-ben is! $\Rightarrow \mathbb{Q}$-ban is.

Láttuk: kvadratikus alakok $\longleftrightarrow$ szimm. bilin. fo.-ek

kvaternióknál: skaláris szorzással bizonyos szorosabb kapcsolat.

K tetszőleges test, $\mathrm{char}(K) \neq 2$. $a, b \neq 0$

$\left(\frac{a, b}{K}\right) = K(a,b) = \{\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in$

kvaternióalgebra

②

$i^2 = a$, $j^2 = b$, $ij = -ji = k$

$k^2 = ijij = -i^2j^2 = -ab$.

Pl.: $\mathbb{H} = \mathbb{R}(-1,-1)$,

$K(1,1) \simeq M_2(K)$:

$$i \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$j \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$B = K(a,b)$. Mikor izomorf $K(c,d)$-vel?
(∃ műveletartó bijekció)

Áll.: $\varphi: K(a,b) \to K(c,d)$ izomorfiz-musnál a tisztán képzetes kvaterniók tisztán képzetes kv.-ba mennek.

Biz.: $z \in K(a,b)$ tisztán képzetes

$\Leftrightarrow$ $z \notin K$, de $z^2 \in K$.

$$(\beta i + \gamma j + \delta k)^2 = a\beta^2 + b\gamma^2 - ab\delta^2 \in K$$

$$(\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k)^2 = \alpha^2 + \underbrace{(\beta i + \gamma j + \delta k)^2}_{\in K} + \underbrace{2\alpha(\beta i + \gamma j + \delta k)}_{=0}$$

$= 0$ ↲ tisztán kép...

Köv.: $\varphi(\bar{z}) = \overline{\varphi(z)}$.

Biz.: $\varphi(\alpha) = \alpha$ $\quad z = \alpha + z_0$ $\quad z_0$ ~~$\in$~~ $+\beta_0$ tiszt. kép...

$\bar{z} = \alpha - z_0$ $\quad \varphi(\bar{z}) = \varphi(\alpha) - \varphi(z_0) =$

$= \alpha + \overline{\varphi(z_0)} = \overline{\alpha + \ldots}$

$= \overline{\varphi(z)}$. ▢

$N(z) := z\bar{z} \overset{⑤}{=} \alpha^2 - a\beta^2 - b\gamma^2 + ab\delta^2 \in K$

$Tr(z) = 2\alpha = z + \bar{z}$.

$N(\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k)$.

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ -ban kvadratikus alak.

Mátrixa: $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -a & & \\ & & -b & \\ & & & ab \end{pmatrix}$

Bilin fv. hozzá

$\beta(x,y) = \frac{Tr(-x\bar{y})}{2}$

<u>Tétel</u> $K(a,b) \simeq K(c,d) \iff$ Normból eredő $(-a,-b,ab)$ ill. $(-c,-d,cd)$ kvadratikus alakok ekvivalensek

<u>Biz.</u> $\boxed{\Rightarrow}$ $N(\varphi(z)) = \varphi(z)\overline{\varphi(z)} = \varphi(z)\varphi(\bar{z})$

$= \varphi(z\bar{z}) = \varphi(N(z)) = N(z) \in K$

Tehát φ egy izomorfizmus a két kv. alak között. Másrészt $\varphi(K(a,b)^0) = K(c,d)^0$. (tisztán képzetesek) Kv. alak meghat. bilin. fv.-t. (chark

$\boxed{\Leftarrow}$

~~Lemma (Witt egyszerűsítési tétele)~~

Ha ~~a~~ két kv. alak ekvivalens, akkor

$\exists$ z_1, z_2, z_3 ~~a~~ $\in K(c,d)^0$ $0 = -\frac{z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1}{2} = z_1z_2 + z_2z_1$

$z_1^2 = a$, $z_2^2 = b$, $z_3^2 = -ab$.

$\varphi(i) = z_1$, $\varphi(j) = z_2 \Rightarrow \varphi(k) = z_3$ izomorfizmus

~~Tétel (Witt egyszerűsítési t.) Legyen B, B' nemel. bilin. formák a V n-dim. K feletti vektort. Tfh. $B \sim B'$ ekvivalensek, és $\varphi: V \to V$ egy skalár~~

④

<u>Tétel</u> (Witt egyesítési-) β $\overset{\text{nemelf. szimm.}}{\text{bilin.}}$ fv. egy V

$\mathbb{K}$-fölötti vektortéren, $U \leq V$, $U' \leq V$ alterek.

Tfh. $\varphi: U \to U'$ egy skalárszorzattartó

lin. lekép. (bijektív) $\Rightarrow$ φ kiterjed egy

$\hat{\varphi}: V \to V$ skalárszorzattartó lin.

bijekcióvá ($\hat{\varphi}|_U = \varphi$).

<u>Biz.</u>: 1. eset $\beta|_U$ elfajuló.

$\Rightarrow \exists x \in U$ $\Rightarrow \beta(x,x) = 0$

$0 \neq$ $\beta(x,u) = 0 \; \forall u \in U$

~~Legyen~~ Mivel β nemelfajuló $\Rightarrow$

$\exists y \in V$ $\beta(y,x) = 1$.

Spec. $y \notin U$. $z := \hat{\varphi}(y)$

Kell: $z \in V$ $\beta(z, \varphi(u)) = \beta(y, u)$

$\forall u \in U$-ra és $\beta(z,z) = \beta(y,$

$\beta\left(y - \frac{\beta(y,y)}{2} x, x\right) = \beta(y,x) = 1$.

$\beta\left(y - \frac{\beta(y,y)}{2} x, y - \frac{\beta(y,y)}{2} x\right) = \beta(y,y) - 2\frac{\beta(y}{2}$

$\Rightarrow$ feltehetjük, hogy $\beta(y,y) = 0$.

Mivel β nemelf. $\Rightarrow$ $\begin{array}{l} V \to V^* \\ x \mapsto f_x \; V \to k \end{array}$

$f_x(v) = \beta(x, v)$

injektív $\Rightarrow$ bijektív (dim V = dim

$\Rightarrow \exists z_0 \in V$ $\beta(z_0, \varphi(u)) = \beta(y, u)$

$\forall u \in U$. Valóban: U'-ben

$e_1, \dots, e_k$ bázis, kieg. $e_{k+1}, \dots, e_n$ V-bázis.

$f(e_i) = \beta(y, \varphi^{-1}(e_i))$ $(i \leq k)$

$f(e_j) = 0$ $(j > k)$

⑤

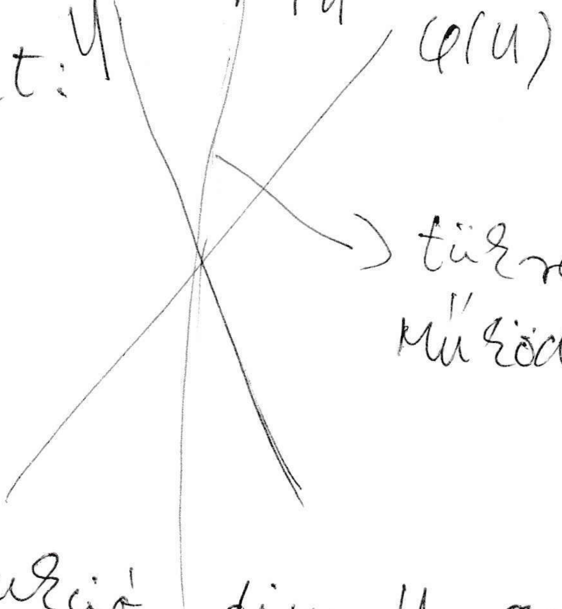
$f \in V^* \Rightarrow \exists z_0 \quad \beta(z_0, v) = f(v) = \beta(y, \ldots$

$\forall v \in U'$

$z := z_0 - \frac{\beta(z_0, z_0)}{2}\varphi(x)$ jó lesz.

2. eset. $\beta|_U$ nemelfajuló.

ötlet:



→ tükrözés erre: $W = \{x + \varphi(x)$ alakú elemek$\}$

működik, ha $\beta|_W$ nemelfajuló.

Indukció dim U szerint.

$\dim U = 1 \Rightarrow U = \langle x \rangle, \quad \beta(x,x) \neq 0.$

$$\beta(x+\varphi(x), x+\varphi(x)) = \beta(x,x) + \beta(\varphi(x),\varphi(x)) + 2\beta(\ldots$$

$$= 2\beta(x,x) + 2\beta(x,\varphi(x))$$

$$\beta(x-\varphi(x), x-\varphi(x)) = 2\beta(x,x) - 2\beta(x,\varphi(x))$$

} valameli[k] $\neq 0$.

$0 \neq z = x \pm \varphi(x) \quad \beta(z,z) \neq 0. \quad \langle z \rangle^{\perp} \oplus \langle z \rangle = V.$

$\tilde{\varphi}$: id, -1

$\tilde{\varphi}(v + \lambda z) := v - \lambda z$, ha $z = x - \varphi(x)$

$\tilde{\varphi}(v + \lambda z) := -v + \lambda z$, ha $z = x + \varphi(x)$.

$x + \varphi(x) \perp x - \varphi(x)$

$\Rightarrow \quad x = \frac{x+\varphi(x)}{2} + \frac{x - \varphi(x)}{2}$

$\Rightarrow \tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$. $\tilde{\varphi}$ izometria

6.

$\dim U > 1 \Rightarrow B|_U$ diag.-ható $\Rightarrow$

$U = U_1 \oplus U_2$ ortogonális $\oplus$.

indukció $\overset{\varphi_1 \quad \varphi_2}{\Rightarrow} \exists\ \sigma_1 : V \to V$ izom. bij.

$\sigma_1|_{U_1} = \varphi_1$.

$\Rightarrow \sigma_1^{-1} \circ \varphi|_{U_1} = id$

ind. $\Rightarrow \exists\ \sigma_2 : U_1^{\perp} \to U_1^{\perp}$

$\sigma_2|_{U_2} = \sigma_1^{-1}|_{U_2}$

$\tilde{\varphi} = \sigma_1 \circ \sigma_2$ jó lesz: $\sigma_2|_{U_1} = id$.

$\tilde{\varphi}|_{U_1} = \sigma_1|_{U_1} = \varphi|_{U_1}$.

$\tilde{\varphi}|_{U_2} = \sigma_1 \circ \sigma_1^{-1} \circ \varphi|_{U_2} = \varphi|_{U_2}$. $\square$

Köv.: $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -a & & \\ & & -b & \\ & & & ab \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -c & & \\ & & -d & \\ & & & cd \end{pmatrix}$ ~~akkor~~ és

csak akkor, ha $\begin{pmatrix} -a & & 0 \\ & -b & \\ 0 & & ab \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -c & & 0 \\ & -d & \\ 0 & & cd \end{pmatrix}$

~~Köv.: $K(a,b) \simeq M_2(K)$ akkor és csak akkor~~

~~ha~~ Köv.: Ekvivalensek:

(1) $K(a,b) \simeq M_2(K)$

(2) $K(a,b)$ nem nullosztómentes

(3) $K(a,b)$ nem ferdetest

(4) $\exists\ x, y \in K \quad ax^2 + by^2 = 1$

(5) $N : K(a,b) \to K$-nak van izotróp eleme: $\exists_{0 \neq} z \in K(a,b)$ $N(z) = 0$

(6) $\exists_{0 \neq z} \in K(a,b)^0$ $N(z) = 0$. 7.

Biz.:

$$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (5)$$

$$N(z) \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{z} := \frac{\bar{z}}{N(z)} \text{ inverz}$$

(5) ⇒ (6) $N(z) = 0$, $z \neq 0$. $Tr(z) = 0 \Rightarrow$ (ezért $z \in K(a,b)^0$)

$U = \langle 1, x \rangle \leq K(a,b)$

$\langle x, \bar{x} \rangle$ $y \in U^\perp$: $Tr(y) = Tr(xy) = 0$

$\Rightarrow Tr(\bar{x}y) = 0$.

Ha $0 = xy = \bar{x}y$, akkor $(x+\bar{x})y = 2Tr(x)y$

$Tr(x) \neq 0 \Rightarrow y = 0$

$\in K$.

Node $N(xy) = N(x) \cdot N(y) = 0$

$N(\bar{x}y) = N(\bar{x}) \cdot N(y) = 0$ ✓

(6) ⇒ (4) $0 = N(z) = N(\beta i + \gamma j + \delta k) = -a\beta^2 - b\gamma^2 + ab\delta^2$

Ha $\delta \neq 0$ $\Rightarrow$ $b\left(\frac{\beta}{b \delta}\right)^2 + a\left(\frac{\gamma}{a \cdot \delta}\right)^2 = 1$.

Ha viszont $\delta = 0$, akkor $b = -a\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2$

vagy $a = -b\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^2$

(amelyik nevező $\neq 0$)

$$ax^2 + (-au^2)y^2 = a(x - uy)(x + uy)$$

$x - uy = \frac{1}{a}$, $x + uy = 1$ jó lesz.

$x = \frac{1 + \frac{1}{a}}{2}$ $\quad y = \frac{1 - \frac{1}{a}}{2u} = \frac{1 - \frac{1}{a}}{2 \cdot \frac{\beta}{\gamma}}$

(4) $\Rightarrow$ (1)

$$ax^2 + by^2 = 1$$

$$\Rightarrow b(ax)^2 + a(by)^2 = ab$$

$$N(\underbrace{by\beta + ax\gamma + \delta}_{z}) = 0.$$

z N nemtriv. $\Rightarrow$

$$\exists\; v \in K(a,b)^0 \qquad Tr(v\bar z) \neq 0.$$

~~$Tr(z) = 0$ ... $\frac{Tr(v)}{2}$~~ -vel

~~feltehetjük, hogy $Tr($~~

$$\Rightarrow \quad \beta(x,y) = -\frac{Tr(x\bar y) - Tr(\bar y x)}{2}$$

nemtriv., izotropikus $\langle v, z\rangle$ altéren.

β mátrixa $\begin{pmatrix}0 & \frac12 \\ \frac12 & 0\end{pmatrix}$ alk. bázisban $\sim \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 \\ -1 & 1\end{pmatrix} = S$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}a & & \\ & b & \\ & & ab\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & & \\ & -1 & \\ & & d\end{pmatrix}$$

$\det = a^2b^2 \Rightarrow d = -1$ vehető.

$$K(1,1) \simeq M_2(K).$$

□

9.

Áll.: $K(1,a) \simeq K(a,-a) \simeq K(1,1)$.

$K(a,b) \simeq K(-ab,b)$

Mi a helyzet, ha $K=\mathbb{Q}_p$?

Van-e $M_2(\mathbb{Q}_p)$-n kívül más?

Ha igen, hány?