Algebrai Számelmélet

9. gyakorlat

1. (3+3+2 pont) Igazoljuk, hogy a direkt limesz egzakt, az inverz limesz balegzakt, továbbá kompakt Hausdorff Abel-csoportokon az inverz limesz egzakt. Itt pl. az inverz limesz esetében a következőt jelenti az állítás: Legyen I egy jobbfiltrált részben rendezett halmaz és $(A_i)_{i\in I}$, $(B_i)_{i\in I}$, ill. $(C_i)_{i\in I}$ egy-egy inverz rendszere Abel-csoportoknak. Tegyük fel továbbá, hogy minden i-re van egy

$$0 \to A_i \xrightarrow{\alpha_i} B_i \xrightarrow{\beta_i} C_i \to 0$$

rövid egzakt sorozat, ami kompatibilis az összekötő leképezésekkel, azaz minden $i \leq j \in I$-re a

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A_j \arrow[r, "\alpha_j"] \arrow[d, "f_{ij}"'] & B_j \arrow[r, "\beta_j"] \arrow[d, "g_{ij}"'] & C_j \arrow[r] \arrow[d, "h_{ij}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A_i \arrow[r, "\alpha_i"] & B_i \arrow[r, "\beta_i"] & C_i \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

diagram kommutatív, ahol rendre f_{ij}, g_{ij}, ill. h_{ij} jelöli az összekötő leképezéseket. Ekkor a

$$0 \to \varprojlim A_i \xrightarrow{\varprojlim \alpha_i} \varprojlim B_i \xrightarrow{\varprojlim \beta_i} \varprojlim C_i$$

sorozat is egzakt. Továbbá ha A_i, B_i, C_i kompakt Hausdorff és az összes fenti leképezés folytonos, akkor a

$$0 \to \varprojlim A_i \xrightarrow{\varprojlim \alpha_i} \varprojlim B_i \xrightarrow{\varprojlim \beta_i} \varprojlim C_i \to 0$$

sorozat is egzakt.

2. Legyen M_i, $i \in I$ (ill. N_j, $j \in J$) egy direkt (ill. inverz) rendszere Abel csoportoknak, M, N pedig tetszőleges Abel-csoportok. Milyen feltételek mellett lehet a Hom-ot illetve $\otimes$-ot felcserélni a $\varinjlim$-mel, illetve $\varprojlim$-mel? Pl. igaz-e, hogy $\mathrm{Hom}(\varprojlim_i N_i, M) \cong \varprojlim_i \mathrm{Hom}(N_i, M)$ vagy $\varinjlim_i (M_i \otimes N) \cong (\varinjlim_i M_i) \otimes N$? Pozitív állítások darabja 3 pont, ellenpéldák 2 pont. (Ha kell, feltehetjük a végesen generáltságot, végességet, stb.)

Az alábbi feladatokban felépítjük a tökéletes p-karakterisztikájú gyűrűk Witt-gyűrűit. Legyen A egy kommutatív egységelemes gyűrű, melyben $p = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{p} \in A$ nem nullosztó és a természetes $A \to \varprojlim_n A/p^nA$ leképezés izomorfizmus (azaz A *p-adikusan teljes*). Tegyük fel továbbá, hogy $R := A/pA$ egy *tökéletes p-karakterisztikájú gyűrű*, azaz a p-edik hatványra emelés („Frobenius") bijektív: minden $x \in R$-re van pontosan egy olyan $x^{p^{-1}} := y \in R$, melyre $y^p = x$. Az ilyen A gyűrűket szigorú p-gyűrűknek nevezzük. Például $A = \mathbb{Z}_p$ egy szigorú p-gyűrű.

3. (2 pont) Igazoljuk, hogy egy p-karakterisztikájú k testen a Frobenius endomorfizmus (azaz a p-edik hatványra emelés) mindig injektív, és pontosan akkor szürjektív, ha k tökéletes test (azaz k felett semmilyen irreducibilis polinomnak nincs többszörös gyöke). Adjunk példát nem tökéletes p-karakterisztikájú testre.

4. (2 pont) Igazoljuk, hogy egy p-karakterisztikájú R gyűrűn (kommutatív, egységelemes, és $\underbrace{1+\cdots+1}_{p}=0$) a p-edik hatványra emelés pontosan akkor injektív, ha R redukált, azaz nincsenek benne nilpotens elemek.

5. (3 pont) Legyen A egy szigorú p-gyűrű, speciálisan $R=A/pA$ egy tökéletes p-karakterisztikájú gyűrű. Egy $x\in R$ elemnek jelöljük $\hat{x}$-pal egy tetszőleges (minden $x\in R$-re előre megválasztott) A-beli felemeltjét (azaz $x=\hat{x}+pA$). Igazoljuk, hogy $[x]:=\lim_{n\to\infty}(\widehat{x^{p^{-n}}})^{p^n}$ limesz létezik az A-n levő p-adikus topológiában és nem függ a felemeltek választásától. Igazoljuk továbbá, hogy $[xy]=[x][y]$. Az $[x]$ elemet az x multiplikatív (vagy Teichmüller) reprezentánsának nevezzük.

A továbbiakban az lesz a célunk, hogy tetszőleges R tökéletes p-karakterisztikájú gyűrűhöz konstruáljunk egy olyan $W(R)$ szigorú p-gyűrűt, melyre $R\cong W(R)/pW(R)$. A $W(R)$ gyűrűt nevezzük az R gyűrű Witt gyűrűjének. $W(R)$ elemei $\sum_{i=0}^{\infty}p^i[x_i]$ alakú formális hatványsorok lesznek, ahol $x_i\in R$. Az $[x_i]$ formális kifejezések lesznek a multiplikatív felemeltek. A fenti hatványsorokon való összeadás és szorzaś definíciójához először a megszámlálható sok elemmel generált szabad tökéletes p-karakterisztikájú gyűrűk Witt gyűrűjét kell megkonstruálnunk, és megnéznünk, hogy abban hogy működik az összeadás illetve a szorzás. Legyen $X_0,X_1,\dots,Y_0,Y_1,\dots$ formális változóknak két végtelen sorozata, p pedig egy rögzített prímszám. Tekintsük továbbá minden $0\le n$-re és $0\le i$-re az X_i és Y_i változóknak egy-egy formális p^n-edik gyökét: $X_i^{p^{-n}}$, ill. $Y_i^{p^{-n}}$ (azaz ezek is formális változók, de a polinomgyűrűben kifaktorizálunk azokkal az azonosságokkal, hogy $(X_i^{p^{-n}})^p=X_i^{p^{-n+1}}$, ill. $(Y_i^{p^{-n}})^p=Y_i^{p^{-n+1}}$). Legyen

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}_p[X_i^{p^{-\infty}},Y_i^{p^{-\infty}}\mid i\ge 0] &:= \bigcup_n \mathbb{Z}_p[X_i^{p^{-n}},Y_i^{p^{-n}}\mid i\ge 0]\ ;\\ S &:= \varprojlim_n \mathbb{Z}_p[X_i^{p^{-\infty}},Y_i^{p^{-\infty}}\mid i\ge 0]/(p^n)\ .\end{aligned}$$

6. (3 pont) Igazoljuk, hogy S egy szigorú p-gyűrű. Speciálisan léteznek olyan $S_i,P_i\in S/pS=\mathbb{F}_p[X_i^{p^{-\infty}},Y_i^{p^{-\infty}}\mid i\ge 0]$ polinomok, melyeknek multiplikatív felemeltjeire

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=0}^{\infty}p^iX_i\right)+\left(\sum_{i=0}^{\infty}p^iY_i\right) &= \sum_{i=0}^{\infty}p^i[S_i]\\ \left(\sum_{i=0}^{\infty}p^iX_i\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty}p^iY_i\right) &= \sum_{i=0}^{\infty}p^i[P_i]\ .\end{aligned}$$

7. (2 pont) Határozzuk meg az $S_0,S_1,P_0,P_1\in\mathbb{F}_p[X_i^{p^{-\infty}},Y_i^{p^{-\infty}}\mid i\ge 0]$ polinomokat.

8. (3 pont) Legyen R egy tetszőleges p-karakterisztikájú tökéletes gyűrű és $W(R)=\{r=(r_0,r_1,\dots)\mid r_i\in R, i\ge 0\}=R^{\mathbb{N}}$ mint halmaz. Tekintsük továbbá a következő műveleteket: $(r+s)_n:=S_n(r_0,r_1,\dots,s_0,s_1,\dots)$, illetve $(rs)_n:=P_n(r_0,r_1,\dots,s_0,s_1,\dots)$. Igazoljuk, hogy $W(R)$ egy szigorú p-gyűrű ezekkel a műveletekkel.

9. (3 pont) Igazoljuk a $W(R)$ Witt gyűrű alábbi univerzális tulajdonságát: ha A egy tetszőleges szigorút p-gyűrű és $\varphi\colon R \to A/pA$ gyűrűhomomorfizmus, akkor ennek egyértelműen létezik egy $\tilde{\varphi}\colon W(R) \to A$ felemeltje. Speciálisan W egy funktor. Megjegyzés: a $\mathrm{Frob}_p\colon R \to R$ homomorfizmus is felemelhető $W(R)$-be, ezt a felemeltet hívjuk Frobenius-felemeltnek.

10. (3 pont) Igazoljuk, hogy az $R \mapsto W(R)$ és az $A \mapsto A/pA$ funktorok egymás kváziinverzei, azaz minden R tökéletes p-karakterisztikájú gyűrűre létezik egy $\Phi_R\colon R \to W(R)/pW(R)$ természetes izomorfizmus, illetve minden A szigorú p-gyűrűre létezik egy $\Psi_A\colon A \to W(A/pA)$ természetes izomorfizmus. A természetesség itt (pl. R esetében) azt jelenti, hogy ha $f\colon R_1 \to R_2$ egy gyűrűhomomorfizmusa tökéletes p-karakterisztikájú gyűrűknek, akkor a

$$\begin{tikzcd} R_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Phi_{R_1}"'] & R_2 \arrow[d, "\Phi_{R_2}"] \\ W(R_1)/pW(R_1) \arrow[r, "f_*"'] & W(R_2)/W(R_2) \end{tikzcd}$$

diagram kommutatív. Tehát a szigorú p-gyűrűk kategóriája ekvivalens a tökéletes p-karakterisztikájú gyűrűk kategóriájával.