Algebrai Számelmélet

8. feladatsor

1. (3 pont) Legyen K egy test, melyen van egy $|\cdot|$ arkhimédeszi abszolútérték, melyre nézve K teljes. Igazoljuk, hogy K izomorf $\mathbb{R}$-rel vagy $\mathbb{C}$-vel úgy, hogy az izomorfizmus még homeomorfizmust is indukál a K-n lévő $|\cdot|$ által meghatározott topológiában.
2. (3 pont) Igazoljuk, hogy ha $K/\mathbb{Q}$ egy véges bővítés, akkor K minden nemtriviális abszolútérték ekvivalens vagy egy $\mathcal{O}_K$-beli prímideálhoz tartozó diszkrét értékelésből származó abszolútértékkel (nemarkhimédeszi eset), vagy a $\mathbb{C}$-n lévő szokásos abszolútérték K-ra való megszorításával egy $\tau\colon K \to \mathbb{C}$ beágyazás mentént (arkhimédeszi eset). Két ilyen abszolútérték pontosan akkor ekvivalens, ha mindkettő arkhimédeszi, és a két megfelelő $\tau_1, \tau_2\colon K \to \mathbb{C}$ $\mathbb{Q}$-homomorfizmus egymás konjugáltja.
3. (1 pont) Írjuk fel a -1-et $-1 = \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i$ p-adikus alakban.
4. (2 pont) Írjuk fel a $2/3$ és a $-2/3$ 5-adikus alakban.
5. (4 pont) Igazoljuk, hogy egy $\sum_{i=-m}^{\infty} a_i p^i$ ($a_i = 0, 1, \ldots, p-1$, $i \geq -m$) alakba írt p-adikus szám pontosan akkor racionális, ha jegyeinek sorozata egy bizonyos ponttól kezdve periodikus.
6. (3 pont) Oldjuk meg az $x^2 = 2$ egyenletet $\mathbb{Z}_7$-ben.
7. (3 pont) Igazoljuk, hogy a $\mathbb{Q}_p$ test minden automorfizmusa folytonos, speciálisan identikus.
8. (2 pont) Legyen $n \geq 1$ egész, és $n = a_0 + a_1 p + \cdots + a_r p^r$ a p-es számrendszerbeli alakja ($0 \leq a_i < p$). Legyen továbbá $s = a_0 + a_1 + \cdots + a_r$. Igazoljuk, hogy $v_p(n!) = \frac{n-s}{p-1}$.
9. (2 pont) Igazoljuk, hogy az $1, 1/10, 1/100, \ldots, 1/10^n, \ldots$ sorozat semmilyen p-re sem konvergál $\mathbb{Q}_p$-ben.
10. (3 pont) Legyen $\varepsilon \in 1 + p\mathbb{Z}_p$ és $\alpha = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots$ egy p-adikus egész, melynek jelöljük s_n-nel az n-edik kezdőszeletét, azaz $s_n = a_0 + a_1 p + \cdots + a_n p^n \in \mathbb{Z}$. Igazoljuk, hogy az $\varepsilon^\alpha := \lim_{n\to\infty} \varepsilon^{s_n}$ limesz létezik $\mathbb{Z}_p$-ben és így $1 + p\mathbb{Z}_p$ egy – multiplikatívan írt – $\mathbb{Z}_p$-modulus.
11. (3 pont) Igazoljuk, hogy ha $(a, p) = 1$ ($a \in \mathbb{Z}$), akkor az a^{p^n} sorozat konvergál $\mathbb{Q}_p$-ben.
12. (2 pont) Igazoljuk, hogy ha $p \neq q$ prímek, akkor a $\mathbb{Q}_p$ és a $\mathbb{Q}_q$ testek nem izomorfak.
13. (2 pont) A $\mathbb{Q}_p$ test algebrai lezártja $\mathbb{Q}_p$-nek végtelen bővítése.
14. (5 pont) Legyen $f(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n + \cdots \in \mathbb{Z}_p[[X]]$ p-adikus egész együtthatós formális hatványsor. Mutassuk meg, hogy f konvergens a $\{|X|_p < 1\}$ nyílt egységkörlapon és itt (legfeljebb) véges sok gyöke van.