

Algebrai Számelmélet

6. feladatsor

- (3 pont) Igazoljuk, hogy ha L/K egy olyan Galois-bővítése számtesteknek (K/\mathbb{Q} véges), melynek Galois-csoportja nem ciklikus, akkor legfeljebb véges sok olyan \mathfrak{p} prím van K -ban, melyet csak egyetlen L -beli prím oszt.
- (3 pont) Legyen K/\mathbb{Q} egy olyan Galois bővítés, melynek Galois csoportja nem Abel. Igazoljuk, hogy semelyik p prím sem marad prím \mathcal{O}_K -ban.
- (5 pont) Legyen K/\mathbb{Q} egy tetszőleges véges bővítés. Igazoljuk, hogy végtelen sok olyan p prím van, ami \mathcal{O}_K -ban teljesen felbomlik.
- (3 pont) Legyen L/K egy véges bővítése számtesteknek, és legyen $L \leq F$ az L test normális lezártja. Vezessük be a következő jelöléseket: $G = \text{Gal}(F/K)$, $H = \text{Gal}(F/L)$, $G_P \leq G$ a felbontási részcsoportha egy $\mathfrak{p} \triangleleft \mathcal{O}_K$ feletti $P \triangleleft \mathcal{O}_F$ prímnek. Létesítsünk bijekciót a \mathfrak{p} fölötti L -beli prímek és a $H \setminus G/G_P$ kettős mellékosztályok között. Ennek felhasználásával adjunk új bizonyítást arra, hogy ha egy prím teljesen felbomlik egy bővítésben, akkor teljesen felbomlik a normális lezártjában is. (+3pont)
- (5 pont) Legyen L/K egy – nem feltétlenül Galois – feloldható p -fokú bővítése számtesteknek, ahol p prímszám (tehát L normális lezártjának K feletti Galois-csoportja feloldható). Tegyük fel továbbá, hogy az $\mathfrak{p} \triangleleft \mathcal{O}_K$ prímideál nem ágazik el L -ben, és van legalább kettő darab egy inerciafokú prímosztója L felett. Igazoljuk, hogy \mathfrak{p} teljesen felbomlik L -ben. (Segítség: Felhasználhatjuk Galois tételét, mely szerint ha G egy prímfokú tranzitív feloldható permutációcsoport, akkor G tetszőleges egységtől különböző elemének csak legfeljebb 1 fixpontja van.)
- (4 pont) Igazoljuk, hogy minden A véges Abel-csoportra van olyan L/\mathbb{Q} Galois-bővítés, melyre $\text{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong A$. (A feladat állítása igaz tetszőleges feloldható csoportra (ez Safarevics tétele), de általában véges csoportra megoldatlan.)
- (3 pont) Legyen n egy páratlan szám. Jellemezzük \mathbb{Q} azon másodfokú bővítéseit, melyeket $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ tartalmazza.
- (3 pont) Igazoljuk, hogy minden $d \in \mathbb{Z}$ négyzetmentes számra van olyan n pozitív egész szám, melyre $\mathbb{Q}(\sqrt{d}) \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_n)$.
- (3 pont) Igazoljuk, hogy $q \geq 3$ esetén $\mathbb{Q}(\zeta_{2q})$ kvadratikus részttestei éppen $\mathbb{Q}(i)$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(i\sqrt{2})$.