Algebrai Számelmélet

5. gyakorlat

1. (*a*) (2 pont) Igazoljuk, hogy egy p páratlan prím pontosan akkor ágazik el $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$-ben, ha $p \mid d$ (d négyzetmentes). Továbbá pontosan akkor marad prím, ha $\left(\frac{d}{p}\right) = -1$, ha pedig $\left(\frac{d}{p}\right) = 1$, akkor felbomlik két különböző prímideál szorzatára.

   (*b*) (2 pont) Mi a helyzet ha $p = 2$?

2. Bontsuk fel a 7-et és a 11-et $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ (1+1 pont), illetve $\mathbb{Q}(\alpha)$ (2+2 pont) egészeinek gyűrűjében, ahol $\alpha^3 - \alpha - 4 = 0$ (használhatjuk az egészek gyűrűjének leírását).

3. (3 pont) Legyen f_n az n-edik eleme a Fibonacci-sorozatnak ($f_0 = 0$, $f_1 = 1$). Igazoljuk, hogy ha $p \neq 2, 5$ prímszám, akkor $f_p \equiv \left(\frac{p}{5}\right) \pmod{p}$.

4. (2 pont) Legyenek $I, J \lhd A$ ideálok az A Dedekind gyűrűben és B az A egész lezártja az L/K szeparábilis bővítésben, ahol K az A hányadosteste. Igazoljuk, hogy $I = IB \cap A$ és $I \mid J \Leftrightarrow IB \mid JB$.

5. (3 pont) Mutassunk példát olyan $\mathbb{Q} \leq K_1, K_2$ véges bővítésekre és egy p prímre, ami teljesen elágazik a K_1 és K_2 testek mindegyikében (azaz $r = 1 = f_1$), de a K_1K_2 kompozitumban nem. (Segítség: Választhatunk kvadratikus bővítéseket is.)

6. (*a*) (3 pont) Igazoljuk, hogy ha $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\alpha]$ alkalmas α-val, akkor egy $p \in \mathbb{Z}$ prímet legfeljebb p darab olyan $\mathfrak{p}_i \lhd \mathcal{O}_K$ prímideál oszthat, melyre $f_i = 1$ (azaz $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_i \cong \mathbb{F}_p$).

   (*b*) (2 pont) Igazoljuk, hogy a 3 teljesen felbomlik $K = \mathbb{Q}(\sqrt{7}, \sqrt{10})$-ben, azaz az (*a*) rész szerint nincs olyan $\alpha \in K$, melyre $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\alpha]$.

   (*c*) (3 pont) Találjunk egy olyan $0 < N \in \mathbb{Z}$ egész számot és egy alkalmas $\alpha \in \mathcal{O}_K$ elemet, melyre $\mathcal{O}_K[1/N] = \mathbb{Z}[1/N][\alpha]$, és bontsuk prímideálok szorzatára $\mathcal{O}_K$-ban az összes $p \mid N$ prímet.

7. (4 pont) Legyen $\mathbb{Q} \leq K$ egy véges bővítés. Igazoljuk, hogy egy $\mathfrak{p} \lhd \mathcal{O}_K$ prím teljesen felbomlik az $(K \leq)L$ és az $(K \leq)L'$ testekben, akkor teljesen felbomlik a két test LL' kompozitumában is (azaz $\overline{K}$ legszűkebb olyan résztestében, ami L-et és L'-t is tartalmazza).

8. (3 pont) Legyenek $\mathbb{Q} \leq K \leq L$ véges bővítések és $K \leq L \leq F$ az L/K bővítés normális lezártja. Igazoljuk, hogy egy $\mathfrak{p} \lhd \mathcal{O}_K$ prím pontosan akkor bomlik fel teljesen L-ben, ha teljesen felbomlik F-ben.

9. (3 pont) Igazoljuk, hogy a $\mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{-5})/\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ bővítés semelyik $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$-beli prímben sem ágazik el.