

Algebrai Számelmélet

2. gyakorlat

- (3 pont) Adjunk meg egész bázist $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ algebrai egészeinek gyűrűjében, ha $d \in \mathbb{Z}$ négyzetmentes.
 - (3 pont) Legyen \mathcal{O} a $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ testben az egészek gyűrűje ($d \in \mathbb{Z}$ négyzetmentes) és $p \nmid 2d$ egy prím. Igazoljuk, hogy $p\mathcal{O}$ pontosan akkor prímeál, ha $\left(\frac{d}{p}\right) = -1$.
 - (4 pont) Igazoljuk, hogy a $\mathbb{C}[x, y]/(y^2 - x^3)$ gyűrű nem egészre zárt.
 - (5 pont) Legyen K/\mathbb{Q} véges (azaz K egy *számtest*) és d_K a K diszkriminánsa. Igazoljuk, hogy $d_K \equiv 0, 1 \pmod{4}$. (Segítség: Mi lenne, ha a $((\sigma_i \alpha_j))$ mátrix a determinánsában minden kifejtési tagot pozitív előjellel vennénk (azaz a permanensét vennénk a mátrixnak)? Használjuk az $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$ azonosságot.)
-
- (2 pont) Bontsuk $33 + 11\sqrt{-7}$ -et felbonthatatlan elemek szorzatára $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$ egészeinek gyűrűjében.
 - (4 pont) Igazoljuk, hogy ha egy Dedekind gyűrűben véges sok prímeál van, akkor az főideálgyűrű.
 - (3+3 pont)
 - Legyen \mathcal{O} egy Dedekind gyűrű és $I \triangleleft \mathcal{O}$ egy ideál. Igazoljuk, hogy \mathcal{O}/I -ben minden ideál főideál.
 - Igazoljuk, hogy Dedekind gyűrűben minden ideál generálható legfeljebb két elemmel.
 - (5 pont) Legyen \mathcal{O} egy olyan integritási tartomány, melyben minden ideál egyértelműen felírható prímeálok szorzataként. Igazoljuk, hogy \mathcal{O} Dedekind gyűrű (azaz egészre zárt, noether, és 1-dimenziós).
 - (5 pont) Igazoljuk, hogy Dedekind gyűrűben minden ideál projektív modulus.
 - (3+3 pont) Legyen $f(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ egy irreducibilis nonsinguláris polinom. (Azaz $(f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}) = (1)$ mint $\mathbb{C}[x, y]$ -ban generált ideál.) Igazoljuk, hogy $\mathbb{C}[x, y]/(f(x, y))$ egy Dedekind gyűrű. Milyen csoport lesz az osztálycsoportja, ha f zérushelyei egy elliptikus görbét alkotnak, azaz $f(x, y) = y^2 - x^3 - ax - b$, ahol $x^3 + ax + b$ -nek nincs többszörös gyöke? (Vö.: 3. feladat, ahol *singuláris* görbénk van.)