Algebrai Számelmélet

11. gyakorlat

A következő feladatok némileg egymásra épülnek. A fő cél a Lubin–Tate formális csoportok definíciója, illetve ezeken keresztül lokális testek Lubin–Tate bővítéseinek konstrukciója.

1. (3 pont) Legyen R egy kommutatív egységelemes gyűrű. Egy (egyparaméteres) kommutatív formális csoport szabálynak nevezünk egy kétváltozós $F(X,Y) \in R[[X,Y]]$ formális hatványsort, ha az alábbi feltételek teljesülnek:

   (i) $F(X,Y) = X + Y +$magasabb fokú tagok;

   (ii) $F(X, F(Y,Z)) = F(F(X,Y), Z)$ (asszociativitás);

   (iii) létezik egy $\iota_F(X) \in XR[[X]]$ hatványsor, melyre $F(X, \iota_F(X)) = 0$ (inverz);

   (iv) $F(X,Y) = F(Y,X)$ (kommutativitás).

   Mutassuk meg, hogy ha $R = \mathcal{O}_K$ egy teljes nemarkhimédeszi test értékelésgyűrűje, és $\mathcal{M}_K$ a maximális ideál, akkor $\mathcal{M}_K$ az $a +_F b := F(a,b)$ műveletre nézve csoport. Igazoljuk továbbá, hogy az $F(X,Y) = X+Y$ és az $F(X,Y) = X+Y+XY$ hatványsorok kommutatív formális csoportok. Mivel lesz izomorf ezekben az esetekben $(\mathcal{M}_K, +_F)$?

2. (3 pont) Egy F és egy G formális csoport közötti homomorfizmus egy olyan $h(T) \in TR[[T]]$ hatványsor, melyre $h(F(X,Y)) = G(h(X), h(Y))$. Mutassuk meg, hogy $F = G$ esetén $\mathrm{End}(F) := \mathrm{Hom}(F,F)$ egy gyűrű az $+_F$ összeadásra, és a kompozícióra nézve. Igazoljuk továbbá, hogy a $h_n(T) = (T+1)^n - 1$ egy endomorfizmusa az $F(X,Y) = X + Y + XY$ formális csoportnak minden $n \geq 1$ egészre.

3. (4 pont) Mostantól legyen $R = \mathcal{O}_K$, ahol $K/\mathbb{Q}_p$ egy véges bővítés és $\pi \in \mathcal{O}_K$ egy prímelem (egységszeres erejéig egyértelmű). Jelölje $\mathcal{F}_\pi$ azon $f(X) \in \mathcal{O}_K[[X]]$ hatványsorok halmazát, melyekre $f(X) = \pi X +$magasabb fokú tagok, és $f(X) \equiv X^q \pmod{\pi}$, ahol $q = p^f$ a $k = \mathcal{O}_K/\mathcal{M}_K$ maradéktest elemszáma. Legyen $f, g \in \mathcal{F}_\pi$ és $\phi_1(X_1, \ldots, X_n) \in \mathcal{O}_K[X_1, \ldots, X_n]$ egy homogén elsőfokú polinom. Igazoljuk, hogy egyértelműen létezik egy olyan $\phi(X_1, \ldots, X_n) \in \mathcal{O}_K[[X_1, \ldots, X_n]]$ n-változós formális hatványsor úgy, hogy $\phi(X_1, \ldots, X_n) = \phi_1(X_1, \ldots, X_n)+$magasabb fokú tagok, és $f(\phi(X_1, \ldots, X_n)) = \phi(g(X_1), \ldots, g(X_n))$.

4. (3 pont) Bizonyítsuk be, hogy minden $f \in \mathcal{F}_\pi$-hez egyértelműen létezik egy olyan $F_f(X,Y) \in \mathcal{O}_K[[X,Y]]$ formális csoport, melyre f endomorfizmusa F_f-nek. (Az ilyen formális csoportokat nevezik Lubin–Tate formális csoportoknak.)

5. (3 pont) Legyen $a \in \mathcal{O}_K$ tetszőleges és $f, g \in \mathcal{F}_\pi$. Igazoljuk, hogy egyértelműen létezik egy $[a]_{g,f}(T) \in T\mathcal{O}_K[[T]]$ hatványsor, melyre $[a]_{g,f}(T) = aT +$magasabb fokú tagok, és $[a]_{g,f} \circ f = g \circ [a]_{g,f}$. Továbbá ekkor $[a]_{g,f}$ egy homomorfizmus F_f-ből F_g-be. Speciálisan F_f és F_g izomorfak.

6. (2 pont) Igazoljuk, hogy az $\mathcal{O}_K \to \mathrm{End}(F_f)$, $a \mapsto [a]_f := [a]_{f,f}$ leképezés egy injektív gyűrűhomomorfizmus, melyre $[\pi]_f = f$. (Ezáltal F_f egy *formális $\mathcal{O}_K$-modulus* lesz.)

7. (3 pont) Legyen $f \in \mathcal{F}_\pi$ tetszőleges (az egyszerűség kedvéért az 5. Feladat miatt vehetjük az $f(T) = \pi T + T^q$ polinomot) és jelöljük Λ_n-nel az $f^{(n)} = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n}$ polinom gyökeinek halmazát $\mathbb{Q}_p$ algebrai lezártjában. Igazoljuk, Λ_n egy q^n elemű halmaz, amely $\mathcal{O}_K$-modulus a $+_{F_f}$ összeadásra és az $a \cdot_{F_f} \lambda := [a]_f(\lambda)$ szorzásra nézve ($a \in \mathcal{O}_K$, $\lambda \in \Lambda_n$). Mutassuk meg továbbá, hogy $\Lambda_n \cong \mathcal{O}_K/(\pi^n)$ mint $\mathcal{O}_K$-modulusok.

8. (4 pont) Legyen $K_{\pi,n} := K(\Lambda_n)$ az $f^{(n)}$ polinom felbontási teste K felett. Igazoljuk, hogy $\mathrm{Gal}(K_{\pi,n}/K) \cong (\mathcal{O}_K/(\pi^n))^\times$, és hogy $K_{\pi,n}/K$ teljesen elágazó. Továbbá, hogy $K_{\pi,n}$ nem függ $f \in \mathcal{F}_\pi$ választásától, és π egy alkalmas $K_{\pi,n}$-beli elem normája.

A fent értelmezett $K_{\pi,n}$ testet a K n-edik (π prímhez tartozó) Lubin–Tate bővítésének nevezik. A $\mathbb{Q}_p$-től különböző p-adikus számtestek esetén ezek játsszák a p-hatványadik körosztási testek analogonjait. Igaz ugyanis a Kronecker–Weber tétel alábbi általánosítása:

Tétel. *Legyen $K/\mathbb{Q}_p$ egy véges bővítés, $\pi \in K$ pedig egy prímelem. Ha L/K egy olyan Galois bővítés, melynek $\mathrm{Gal}(L/K)$ Galois-csoportja Abel, akkor van olyan n pozitív egész, melyre $L \subseteq K_{\pi,n}K_n^{ur}$, ahol K_n^{ur} a(z egyetlen) n-edfokú elágazásmentes bővítése K-nak. Más szavakkal K maximális Abel-féle bővítése a $K_{\pi,\infty}K_\infty^{ur}$ test, ahol $K_{\pi,\infty} = \bigcup_n K_{\pi,n}$ és $K_\infty^{ur} = \bigcup_n K_n^{ur}$. Továbbá a Galois csoport $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)^{ab} = \mathrm{Gal}(K_{\pi,\infty}K_\infty^{ur}/K) \cong \mathcal{O}_K^\times \times \hat{\mathbb{Z}}$.*