Algebrai Számelmélet

10. gyakorlat

1. (2 pont) Igazoljuk, hogy ha $K/\mathbb{Q}_p$ egy véges bővítés, akkor a $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots$ hatványsor konvergens a maximális ideálon.
2. (3 pont) Milyen p-adikus abszolútértékű x-ekre konvergens az $\exp(x) = 1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$ hatványsor? (Határozzuk meg a konvergenciasugarat.)
3. (3 pont) Legyen $K/\mathbb{Q}_p$ véges bővítés e abszolút elágazási indexszel és $\mathfrak{p}$ maximális ideállal. Igazoljuk, hogy az $\exp\colon \mathfrak{p}^n \to U^{(n)} = 1 + \mathfrak{p}^n$ és $\log\colon U^{(n)} \to \mathfrak{p}^n$ izomorfizmust létesít a $\mathfrak{p}^n$ additív és az $U^{(n)}$ multiplikatív csoport között, ha $n > \frac{e}{p-1}$. Speciálisan $U^{(n)}$ torziómentes Abel csoport.
4. (3 pont) Igazoljuk, hogy ha $|K : \mathbb{Q}_p| = d$ és $\pi \in K$ prím, akkor $K^\times \cong \pi^{\mathbb{Z}} \oplus Z_{q-1} \oplus Z_{p^a} \oplus \mathbb{Z}_p^d$ alkalmas $a \geq 0$ egész számmal, ahol q a maradéktest elemszáma.
5. (2 pont) Igazoljuk, hogy $z \in \mathbb{Z}_p$ esetén az $(1+x)^z = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{z}{n} x^n$ binomiális sor konvergens $v_p(x) > \frac{1}{p-1}$ esetén. Továbbá ekkor $(1+x)^z = \exp(z \log(1+x))$.
6. (3 pont) Legyen $K/\mathbb{Q}_p$ véges. Igazoljuk, hogy $K^\times$ minden véges indexű részcsoportja nyílt (és így persze zárt is).
7. (3 pont) Legyen $K/\mathbb{Q}_p$ egy véges bővítés, $\pi \in K$ egy prímelem és v_π a normált értékelés (azaz $v_\pi(\pi) = 1$). Mivel K egy lokálisan kompakt Abel-csoport, létezik rajta egy dx eltolásinvariáns Haar-mérték, mely egyértelmű, ha feltesszük, hogy $\int_{\mathcal{O}_K} dx = 1$. Igazoljuk, hogy $|a|_\pi = \int_{a\mathcal{O}_K} dx$, ahol a $|\cdot|$ abszolútértéket úgy normáljuk, hogy $|a|_\pi := q^{-v_\pi(a)}$, ahol $q = |\mathcal{O}_K/(\pi)|$ a maradéktest elemszáma. Mutassuk meg továbbá, hogy $\frac{dx}{|x|_\pi}$ egy eltolásinvariáns Haar-mérték $K^\times$-en.
8. (3 pont) Legyen $K/\mathbb{Q}_p$ véges. Igazoljuk, hogy egy $f(x) \in K[x]$ polinom Newton-poligonjának meredekségei éppen a gyökeinek a π-adikus értékelései (multiplicitással), ahol $\pi \in K$ egy prímelem (a Newton-poligont is a π-adikus értékeléssel gyártjuk le).
9. (3 pont) Legyen $K/\mathbb{Q}_p$ véges. Igazoljuk, hogy ha $f(x) \in K[x]$ irreducibilis, akkor f Newton-poligonja egyetlen szakaszból áll. Adjunk példát arra, hogy előfordulhat, hogy ezen a szakaszon van még a két végponttól különböző rácspont.