Algebrai Számelmélet

6. feladatsor

beadható 2018. november 8-ig

1. (3 pont) Igazoljuk, hogy ha L/K egy olyan Galois-bővítése számtesteknek ($K/\mathbb{Q}$ véges), melynek Galois-csoportja nem ciklikus, akkor legfeljebb véges sok olyan $\mathfrak{p}$ prím van K-ban, melyet csak egyetlen L-beli prím oszt.
2. (3 pont) Legyen $K/\mathbb{Q}$ egy olyan Galois bővítés, melynek Galois csoportja nem Abel. Igazoljuk, hogy semelyik p prím sem marad prím $\mathcal{O}_K$-ban.
3. (5 pont) Legyen $K/\mathbb{Q}$ egy tetszőleges véges bővítés. Igazoljuk, hogy végtelen sok olyan p prím van, ami $\mathcal{O}_K$-ban teljesen felbomlik.
4. (3 pont) Legyen L/K egy véges bővítése számtesteknek, és legyen $L \leq F$ az L test normális lezártja. Vezessük be a következő jelöléseket: $G = \mathrm{Gal}(F/K)$, $H = \mathrm{Gal}(F/L)$, $G_P \leq G$ a felbontási részcsoportja egy $\mathfrak{p} \lhd \mathcal{O}_K$ feletti $P \lhd \mathcal{O}_F$ prímnek. Létesítsünk bijekciót a $\mathfrak{p}$ fölötti L-beli prímek és a $H\backslash G/G_P$ kettős mellékosztályok között. Ennek felhasználásával adjunk új bizonyítást arra, hogy ha egy prím teljesen felbomlik egy bővítésben, akkor teljesen felbomlik a normális lezártjában is. (+3pont)
5. (5 pont) Legyen L/K egy – nem feltétlenül Galois – feloldható p-fokú bővítése számtesteknek, ahol p prímszám (tehát L normális lezártjának K feletti Galois-csoportja feloldható). Tegyük fel továbbá, hogy az $\mathfrak{p} \lhd \mathcal{O}_K$ prímideál nem ágazik el L-ben, és van legalább kettő darab egy inerciafokú prímosztója L felett. Igazoljuk, hogy $\mathfrak{p}$ teljesen felbomlik L-ben. (Segítség: Felhasználhatjuk Galois tételét, mely szerint ha G egy prímfokú tranzitív feloldható permutációcsoport, akkor G tetszőleges egységtől különböző elemének csak legfeljebb 1 fixpontja van.)
6. (4 pont) Igazoljuk, hogy minden A véges Abel-csoportra van olyan $L/\mathbb{Q}$ Galois-bővítés, melyre $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong A$. (A feladat állítása igaz tetszőleges feloldható csoportra (ez Safarevics tétele), de általában véges csoportra megoldatlan.)
7. (3 pont) Legyen n egy páratlan szám. Jellemezzük $\mathbb{Q}$ azon másodfokú bővítéseit, melyeket $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ tartalmazza.
8. (3 pont) Igazoljuk, hogy minden $d \in \mathbb{Z}$ négyzetmentes számra van olyan n pozitív egész szám, melyre $\mathbb{Q}(\sqrt{d}) \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_n)$.
9. (3 pont) Igazoljuk, hogy $q \geq 3$ esetén $\mathbb{Q}(\zeta_{2^q})$ kvadratikus résztestei éppen $\mathbb{Q}(i)$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(i\sqrt{2})$.