Algebrai Számelmélet

4. gyakorlat

beadható 2018. október 18-ig

1. (2 pont) Legyen R és R' egy integritási tartomány és $0 \notin S \subset R$ egy multiplikatívan zárt halmaz. Tegyük fel továbbá, hogy $\varphi\colon R \to R'$ egy olyan gyűrűhomomorfizmus, melyre $\varphi(S) \subseteq R'^{\times}$. Igazoljuk, hogy ekkor φ egyértelműen kiterjed egy $\tilde{\varphi}\colon RS^{-1} \to R'$ gyűrűhomomorfizmussá.

2. (3 pont) Legyen R egy integritási tartomány és $0 \notin S \subset R$ egy multiplikatívan zárt halmaz. Igazoljuk, hogy RS^{-1} egy lapos R-modulus, azaz a vele vett tenzorszorzat egzakt.

3. (3 pont) Legyen R egy integritási tartomány és $f\colon M \to N$ egy R-homomorfizmus az M, N R-modulusok között. Igazoljuk, hogy az alábbiak ekvivalensek:

   (i) f injektív (szürjektív);

   (ii) $f_{\mathfrak{p}}\colon M_{\mathfrak{p}} \to N_{\mathfrak{p}}$ injektív (szürjektív) minden $\mathfrak{p} \lhd R$ prímideálra;

   (iii) $f_{\mathfrak{m}}\colon M_{\mathfrak{m}} \to N_{\mathfrak{m}}$ injektív (szürjektív) minden $\mathfrak{m} \lhd R$ maximális ideálra.

   Itt $M_{\mathfrak{p}} = R_{\mathfrak{p}} \otimes_R M$, $M_{\mathfrak{m}} = R_{\mathfrak{m}} \otimes_R M$, $N_{\mathfrak{p}} = R_{\mathfrak{p}} \otimes_R N$ és $N_{\mathfrak{m}} = R_{\mathfrak{m}} \otimes_R N$.

4. (3 pont) Legyen R integritási tartomány és $0 \notin S \subset R$ egy multiplikatívan zárt halmaz. Igazoljuk, hogy ha RS^{-1} egész R felett, akkor $RS^{-1} = R$.

5. (3 pont) (Nakayama Lemma) Legyen R egy lokális gyűrű $\mathfrak{m} \lhd R$ maximális ideállal és M egy végesen generált R-modulus. Igazoljuk, hogy ha egy $N \leq M$ részmodulusra $M = N + \mathfrak{m}M$, akkor $M = N$.

6. (3 pont) Legyen K egy test és $v\colon K^{\times} \to \mathbb{Z}$ egy szürjektív csoporthomomorfizmus és legyen $v(0) = \infty$. Tegyük fel, hogy $v(x + y) \geq \min(v(x), v(y))$. Igazoljuk, hogy $\mathcal{O} := \{\alpha \in K \mid v(\alpha) \geq 0\}$ egy diszkrét értékelésgyűrű.

7. (3 pont) Igazoljuk, hogy egy noether-féle integritási tartomány pontosan akkor diszkrét értékelésgyűrű, ha egészre zárt és egyetlen nemnulla prímideálja van.

8. (3 pont) Legyen $\mathcal{O}$ egy Dedekind gyűrű és k egy pozitív egész. Minden $1 \leq i \leq k$-ra legyen $\mathfrak{p}_i \lhd \mathcal{O}$ egy prímideál, $x_i \in K$ (ahol K a hányadostest) és $n_i \in \mathbb{Z}$. Igazoljuk, hogy van olyan $x \in K$, melyre $v_{\mathfrak{p}_i}(x - x_i) \geq n_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ és $v_{\mathfrak{p}}(x) \geq 0$ minden $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_i$ prímre.

9. Legyen $K/\mathbb{Q}$ egy véges bővítés, $\mathcal{O}_K$ az egészek gyűrűje, S pedig egy $\mathcal{O}_K$-beli (nemnulla) prímideálokból álló véges halmaz és $X = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K) \setminus S$.

   (*a*) (egzaktság a közepén minden ponton darabja 2 pont, a két szélén darabja 1–1 pont) Igazoljuk, hogy a
   $$1 \to \mathcal{O}^\times \to \mathcal{O}(X)^\times \to \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathcal{O}) \setminus X} K^\times/\mathcal{O}_\mathfrak{p}^\times \to Cl(\mathcal{O}) \to Cl(\mathcal{O}(X)) \to 1 \ .$$
   sorozat egzakt (a leképezések megkonstruálása a feladat része). Továbbá minden $0 \neq \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathcal{O})$ prímre $K^\times/\mathcal{O}_\mathfrak{p}^\times \cong \mathbb{Z}$ (1 pont).

   (*b*) (2 pont) Igazoljuk, hogy $Cl(\mathcal{O}_K(X))$ véges, továbbá $\mathcal{O}_K(X)^\times \cong \mu(K) \times \mathbb{Z}^{|S|+r+s-1}$, ahol r a valós beágyazások, s pedig a tisztán képzetes beágyazások párjainak száma.

10. (3 pont) (Newton poligon) Legyen $\mathcal{O}$ diszkrét értékelésgyűrű K hányadostesttel és $v\colon K^\times \to \mathbb{Z}$ értékeléssel. Ha $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ egy n-edfokú K-beli együtthatós polinom, akkor f Newton-poligonja a síkon a $(-i, v(a_i))$ rácspontok alsó konvex burka (tehát egy $(-n, v(a_n))$-et $(0, v(a_0))$-lal összekötő konvex töröttvonal, melynek csúcsai a $(-i, v(a_i))$ pontok közül kerülnek ki, és alatta nincs ilyen rácspont). Jelöljük továbbá $S(f)$-fel a Newton-poligon meredekségeinek a multihalmazát: azaz $S(f)$ egy n elemű multihalmaz, melyben minden s racionális szám a Newton-poligon s-meredekségű részének x-tengelyre vett vetületének hossza szerinti multiplicitással szerepel. Igazoljuk, hogy $S(fg) = S(f) \cup S(g)$. Speciálisan ha $f(x) \in K[x]$ Newton-poligon egyetlen szakaszból áll, melyen a két szélén kívül nincs más rácspont, akkor f irreducibilis.