Algebrai Számelmélet

2. gyakorlat

beadható 2018. szeptember 27-ig

1. (3 pont) Adjunk meg egész bázist $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ algebrai egészeinek gyűrűjében, ha $d \in \mathbb{Z}$ négyzetmentes.
2. (3 pont) Legyen $\mathcal{O}$ a $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ testben az egészek gyűrűje ($d \in \mathbb{Z}$ négyzetmentes) és $p \nmid 2d$ egy prím. Igazoljuk, hogy $p\mathcal{O}$ pontosan akkor prímideál, ha $\left(\frac{d}{p}\right) = -1$.
3. (4 pont) Igazoljuk, hogy a $\mathbb{C}[x,y]/(y^2 - x^3)$ gyűrű nem egészre zárt.
4. (5 pont) Legyen $K/\mathbb{Q}$ véges (azaz K egy *számtest*) és d_K a K diszkriminánsa. Igazoljuk, hogy $d_K \equiv 0, 1 \pmod 4$. (Segítség: Mi lenne, ha a $((\sigma_i \alpha_j))$ mátrix a determinánsában minden kifejtési tagot pozitív előjellel vennénk (azaz a permanensét vennénk a mátrixnak)? Használjuk az $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$ azonosságot.)

---

5. (2 pont) Bontsuk $33 + 11\sqrt{-7}$-et felbonthatatlan elemek szorzatára $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$ egészeinek gyűrűjében.
6. (4 pont) Igazoljuk, hogy ha egy Dedekind gyűrűben véges sok prímideál van, akkor az főideálgyűrű.
7. (3+3 pont)
   - (i) Legyen $\mathcal{O}$ egy Dedekind gyűrű és $I \lhd \mathcal{O}$ egy ideál. Igazoljuk, hogy $\mathcal{O}/I$-ben minden ideál főideál.
   - (ii) Igazoljuk, hogy Dedekind gyűrűben minden ideál generálható legfeljebb két elemmel.
8. (5 pont) Legyen $\mathcal{O}$ egy olyan integritási tartomány, melyben minden ideál egyértelműen felírható prímideálok szorzataként. Igazoljuk, hogy $\mathcal{O}$ Dedekind gyűrű (azaz egészre zárt, noether, és 1-dimenziós).
9. (5 pont) Igazoljuk, hogy Dedekind gyűrűben minden ideál projektív modulus.
10. (3+3 pont) Legyen $f(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ egy irreducibilis nemszinguláris polinom. (Azaz $(f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}) = (1)$ mint $\mathbb{C}[x,y]$-ban generált ideál.) Igazoljuk, hogy $\mathbb{C}[x,y]/(f(x,y))$ egy Dedekind gyűrű. Milyen csoport lesz az osztálycsoportja, ha f zérushelyei egy elliptikus görbét alkotnak, azaz $f(x,y) = y^2 - x^3 - ax - b$, ahol $x^3 + ax + b$-nek nincs többszörös gyöke? (Vö.: 3. feladat, ahol *szinguláris* görbénk van.)