Algebrai Számelmélet

10. gyakorlat

beadható 2018. december 6-ig

1. (2 pont) Igazoljuk, hogy ha $K/\mathbb{Q}_p$ egy véges bővítés, akkor a $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots$ hatványsor konvergens a maximális ideálon.

2. (3 pont) Milyen p-adikus abszolútértékű x-ekre konvergens az $\exp(x) = 1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$ hatványsor? (Határozzuk meg a konvergenciasugarat.)

3. (3 pont) Legyen $K/\mathbb{Q}_p$ véges bővítés e abszolút elágazási indexszel és $\mathfrak{p}$ maximális ideállal. Igazoljuk, hogy az $\exp\colon \mathfrak{p}^n \to U^{(n)} = 1 + \mathfrak{p}^n$ és $\log\colon U^{(n)} \to \mathfrak{p}^n$ izomorfizmust létesít a $\mathfrak{p}^n$ additív és az $U^{(n)}$ multiplikatív csoport között, ha $n > \frac{e}{p-1}$. Speciálisan $U^{(n)}$ torziómentes Abel csoport.

4. (3 pont) Igazoljuk, hogy ha $|K : \mathbb{Q}_p| = d$ és $\pi \in K$ prím, akkor $K^\times \cong \pi^{\mathbb{Z}} \oplus Z_{q-1} \oplus Z_{p^a} \oplus \mathbb{Z}_p^d$ alkalmas $a \geq 0$ egész számmal, ahol q a maradéktest elemszáma.

5. (2 pont) Igazoljuk, hogy $z \in \mathbb{Z}_p$ esetén az $(1+x)^z = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{z}{n} x^n$ binomiális sor konvergens $v_p(x) > \frac{1}{p-1}$ esetén. Továbbá ekkor $(1+x)^z = \exp(z \log(1+x))$.

6. (3 pont) Legyen $K/\mathbb{Q}_p$ véges. Igazoljuk, hogy $K^\times$ minden véges indexű részcsoportja nyílt (és így persze zárt is).

7. (3 pont) Legyen $K/\mathbb{Q}_p$ egy véges bővítés, $\pi \in K$ egy prímelem és v_π a normált értékelés (azaz $v_\pi(\pi) = 1$). Igazoljuk, hogy K lokálisan kompakt Abel-csoport, speciálisan létezik rajta egy dx eltolásinvariáns Haar-mérték, mely egyértelmű, ha feltesszük, hogy $\int_{\mathcal{O}_K} dx = 1$. Igazoljuk, hogy $v_\pi(a) = \int_{a\mathcal{O}_K} dx$. Mutassuk meg továbbá, hogy $\frac{dx}{|x|_\pi}$ egy eltolásinvariáns Haar-mérték $K^\times$-en.

8. (3 pont) Legyen $K/\mathbb{Q}_p$ véges. Igazoljuk, hogy egy $f(x) \in K[x]$ polinom Newton-poligonjának meredekségei éppen a gyökeinek a π-adikus értékelései (multiplicitással), ahol $\pi \in K$ egy prímelem (a Newton-poligont is a π-adikus értékeléssel gyártjuk le).

9. (3 pont) Legyen $K/\mathbb{Q}_p$ véges. Igazoljuk, hogy ha $f(x) \in K[x]$ irreducibilis, akkor f Newton-poligonja egyetlen szakaszból áll. Adjunk példát arra, hogy előfordulhat, hogy ezen a szakaszon van még a két végponttól különböző rácspont.

---

10. (3 pont) Legyen R egy kommutatív egységelemes gyűrű. Egy (egyparaméteres) kommutatív formális csoport szabálynak nevezünk egy kétváltozós $F(X,Y) \in R[[X,Y]]$ formális hatványsort, ha az alábbi feltételek teljesülnek:

(*i*) $F(X,Y) = X + Y +$magasabb fokú tagok;

(*ii*) $F(X, F(Y,Z)) = F(F(X,Y),Z)$ (asszociativitás);

(*iii*) létezik egy $\iota_F(X) \in XR[[X]]$ hatványsor, melyre $F(X, \iota_F(X)) = 0$ (inverz);

(*iv*) $F(X,Y) = F(Y,X)$ (kommutativitás).

Mutassuk meg, hogy ha $R = \mathcal{O}_K$ egy teljes nemarkhimédeszi test értékelésgyűrűje, és $\mathcal{M}_K$ a maximális ideál, akkor $\mathcal{M}_K$ az $a +_F b := F(a,b)$ műveletre nézve csoport. Igazoljuk továbbá, hogy az $F(X,Y) = X+Y$ és az $F(X,Y) = X+Y+XY$ hatványsorok kommutatív formális csoportok. Mivel lesz izomorf ezekben az esetekben $(\mathcal{M}_K, +_F)$?

11. (3 pont) Egy F és egy G formális csoport közötti homomorfizmus egy olyan $h(T) \in TR[[T]]$ hatványsor, melyre $h(F(X,Y)) = G(h(X), h(Y))$. Mutassuk meg, hogy $F = G$ esetén $\mathrm{End}(F) := \mathrm{Hom}(F,F)$ egy gyűrű az $+_F$ összeadásra, és a kompozícióra nézve. Igazoljuk továbbá, hogy a $h_n(T) = (T+1)^n - 1$ egy endomorfizmusa az $F(X,Y) = X + Y + XY$ formális csoportnak minden $n \geq 1$ egészre.

12. (4 pont) Mostantól legyen $R = \mathcal{O}_K$, ahol $K/\mathbb{Q}_p$ egy véges bővítés és $\pi \in \mathcal{O}_K$ egy prímelem (egységszeres erejéig egyértelmű). Jelölje $\mathcal{F}_\pi$ azon $f(X) \in \mathcal{O}_K[[X]]$ hatványsorok halmazát, melyekre $f(X) = \pi X +$magasabb fokú tagok, és $f(X) \equiv X^q \pmod{\pi}$, ahol $q = p^f$ a $k = \mathcal{O}_K/\mathcal{M}_K$ maradéktest elemszáma. Legyen $f, g \in \mathcal{F}_\pi$ és $\phi_1(X_1, \ldots, X_n) \in \mathcal{O}_K[X_1, \ldots, X_n]$ egy homogén elsőfokú polinom. Igazoljuk, hogy egyértelműen létezik egy olyan $\phi(X_1, \ldots, X_n) \in \mathcal{O}_K[[X_1, \ldots, X_n]]$ n-változós formális hatványsor úgy, hogy $\phi(X_1, \ldots, X_n) = \phi_1(X_1, \ldots, X_n) +$magasabb fokú tagok, és $f(\phi(X_1, \ldots, X_n)) = \phi(g(X_1), \ldots, g(X_n))$.

13. (3 pont) Bizonyítsuk be, hogy minden $f \in \mathcal{F}_\pi$-hez egyértelműen létezik egy olyan $F_f(X,Y) \in \mathcal{O}_K[[X,Y]]$ formális csoport, melyre f endomorfizmusa F_f-nek. (Az ilyen formális csoportokat nevezik Lubin–Tate formális csoportoknak.)

14. (3 pont) Legyen $a \in \mathcal{O}_K$ tetszőleges és $f, g \in \mathcal{F}_\pi$. Igazoljuk, hogy egyértelműen létezik egy $[a]_{g,f}(T) \in T\mathcal{O}_K[[T]]$ hatványsor, melyre $[a]_{g,f}(T) = aT +$magasabb fokú tagok, és $[a]_{g,f} \circ f = g \circ [a]_{g,f}$. Továbbá ekkor $[a]_{g,f}$ egy homomorfizmus F_f-ből F_g-be. Speciálisan F_f és F_g izomorfak.

15. (2 pont) Igazoljuk, hogy az $\mathcal{O}_K \to \mathrm{End}(F_f)$, $a \mapsto [a]_f := [a]_{f,f}$ leképezés egy injektív gyűrűhomomorfizmus, melyre $[\pi]_f = f$. (Ezáltal F_f egy *formális $\mathcal{O}_K$-modulus* lesz.)

16. (3 pont) Legyen $f \in \mathcal{F}_\pi$ tetszőleges (az egyszerűség kedvéért a 14. Feladat miatt vehetjük az $f(T) = \pi T + T^q$ polinomot) és jelöljük Λ_n-nel az $f^{(n)} = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n}$ polinom gyökeinek halmazát $\mathbb{Q}_p$ algebrai lezártjában. Igazoljuk, Λ_n egy q^n elemű halmaz, amely $\mathcal{O}_K$-modulus a $+_{F_f}$ összeadásra és az $a \cdot_{F_f} \lambda := [a]_f(\lambda)$ szorzásra nézve ($a \in \mathcal{O}_K$, $\lambda \in \Lambda_n$). Mutassuk meg továbbá, hogy $\Lambda_n \cong \mathcal{O}_K/(\pi^n)$ mint $\mathcal{O}_K$-modulusok.

17. (4 pont) Legyen $K_{\pi,n} := K(\Lambda_n)$ az $f^{(n)}$ polinom felbontási teste K felett. Igazoljuk, hogy $\mathrm{Gal}(K_{\pi,n}/K) \cong (\mathcal{O}_K/(\pi^n))^\times$, és hogy $K_{\pi,n}/K$ teljesen elágazó. Továbbá, hogy $K_{\pi,n}$ nem függ $f \in \mathcal{F}_\pi$ választásától, és π egy alkalmas $K_{\pi,n}$-beli elem normája.