

Algebrai Számelmélet

10. gyakorlat

2015. november 25.

- (2 pont) Igazoljuk, hogy ha K/\mathbb{Q}_p egy véges bővítés, akkor a $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots$ hatványsor konvergens a maximális ideálon.
 - (3 pont) Milyen p -adikus abszolútértékű x -ekre konvergens az $\exp(x) = 1 + x + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$ hatványsor? (Határozzuk meg a konvergenciasugarat.)
 - (3 pont) Legyen K/\mathbb{Q}_p véges bővítés e abszolút elágazási indexszel és \mathfrak{p} maximális ideállal. Igazoljuk, hogy az $\exp: \mathfrak{p}^n \rightarrow U^{(n)} = 1 + \mathfrak{p}^n$ és $\log: U^{(n)} \rightarrow \mathfrak{p}^n$ izomorfizmust létesít a \mathfrak{p}^n additív és az $U^{(n)}$ multiplikatív csoport között, ha $n > \frac{e}{p-1}$. Speciálisan $U^{(n)}$ torziómentes Abel csoport.
 - (3 pont) Igazoljuk, hogy ha $|K : \mathbb{Q}_p| = d$ és $\pi \in K$ prím, akkor $K^\times \cong \pi^{\mathbb{Z}} \oplus Z_{q-1} \oplus Z_{p^a} \oplus \mathbb{Z}_p^d$ alkalmas $a \geq 0$ egész számmal, ahol q a maradéktest elemszáma.
 - (2 pont) Igazoljuk, hogy $z \in \mathbb{Z}_p$ esetén az $(1+x)^z = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{z}{n} x^n$ binomiális sor konvergens $v_p(x) > \frac{1}{p-1}$ esetén. Továbbá ekkor $(1+x)^z = \exp(z \log(1+x))$.
 - (3 pont) Legyen K/\mathbb{Q}_p véges. Igazoljuk, hogy K^\times minden véges indexű részcsoportha nyílt (és így persze zárt is).
 - (3 pont) Legyen K/\mathbb{Q}_p egy véges bővítés, $\pi \in K$ egy prímelem és v_π a normált értékelés (azaz $v_\pi(\pi) = 1$). Láttuk, hogy K lokálisan kompakt Abel-csoport, speciálisan létezik rajta egy dx eltolásinvariáns Haar-mérték, mely egyértelmű, ha feltesszük, hogy $\int_{\mathcal{O}_K} dx = 1$. Igazoljuk, hogy $v_\pi(a) = \int_{a\mathcal{O}_K} dx$. Mutassuk meg továbbá, hogy $\frac{dx}{|x|^\pi}$ egy eltolásinvariáns Haar-mérték K^\times -en.
 - (3 pont) Legyen K/\mathbb{Q}_p véges. Igazoljuk, hogy egy $f(x) \in K[x]$ polinom Newton-poligonjának meredekségei éppen a gyökeinek a π -adikus értékelései (multiplicitással), ahol $\pi \in K$ egy prímelem (a Newton-poligont is a π -adikus értékeléssel gyártjuk le).
 - (3 pont) Legyen K/\mathbb{Q}_p véges. Igazoljuk, hogy ha $f(x) \in K[x]$ irreducibilis, akkor f Newton-poligonja egyetlen szakaszból áll. Adjunk példát arra, hogy előfordulhat, hogy ezen a szakaszon van még a két végponttól különböző rácspont.
-
- (3 pont) Legyen R egy kommutatív egységelemes gyűrű. Egy (egyparaméteres) kommutatív formális csoport szabálynak nevezünk egy kétváltozós $F(X, Y) \in R[[X, Y]]$ formális hatványsort, ha az alábbi feltételek teljesülnek:

- (i) $F(X, Y) = X + Y$ +magasabb fokú tagok;
- (ii) $F(X, F(Y, Z)) = F(F(X, Y), Z)$ (asszociativitás);
- (iii) létezik egy $\iota_F(X) \in XR[[X]]$ hatványsor, melyre $F(X, \iota_F(X)) = 0$ (inverz);
- (iv) $F(X, Y) = F(Y, X)$ (kommutativitás).

Mutassuk meg továbbá, hogy ha $R = \mathcal{O}_K$ egy teljes nemarkhimédeszi test értékelés-gyűrűje, és \mathcal{M}_K a maximális ideál, akkor \mathcal{M}_K az $a +_F b := F(a, b)$ műveletre nézve csoport. Igazoljuk továbbá, hogy az $F(X, Y) = X + Y$ és az $F(X, Y) = X + Y + XY$ hatványsorok kommutatív formális csoportok. Mivel lesz izomorf ezekben az esetekben $(\mathcal{M}_K, +_F)$?

11. (3 pont) Egy F és egy G formális csoport közötti homomorfizmus egy olyan $h(T) \in TA[[T]]$ hatványsor, melyre $h(F(X, Y)) = G(h(X), h(Y))$. Mutassuk meg, hogy $F = G$ esetén $\text{End}(F) := \text{Hom}(F, F)$ egy gyűrű az $+_F$ összeadásra, és a kompozícióra nézve. Igazoljuk továbbá, hogy a $h_n(T) = (T + 1)^n - 1$ egy endomorfizmusa az $F(X, Y) = X + Y + XY$ formális csoportnak minden $n \geq 1$ egészre.
12. (4 pont) Mostantól legyen $R = \mathcal{O}_K$, ahol K/\mathbb{Q}_p egy véges bővítés és $\pi \in \mathcal{O}_K$ egy prímelem (egységszeres erejéig egyértelmű). Jelölje \mathcal{F}_π azon $f(X) \in \mathcal{O}_K[[X]]$ hatványsorok halmazát, melyekre $f(X) = \pi X$ +magasabb fokú tagok, és $f(X) \equiv X^q \pmod{\pi}$, ahol $q = p^f$ a $k = \mathcal{O}_K/\mathcal{M}_K$ maradéktest elemszáma. Legyen $f, g \in \mathcal{F}_\pi$ és $\phi_1(X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{O}_K[X_1, \dots, X_n]$ egy homogén elsőfokú polinom. Igazoljuk, hogy egyértelműen létezik egy olyan $\phi(X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{O}_K[[X_1, \dots, X_n]]$ n -változós formális hatványsor úgy, hogy $\phi(X_1, \dots, X_n) = \phi_1(X_1, \dots, X_n)$ +magasabb fokú tagok, és $f(\phi(X_1, \dots, X_n)) = \phi(g(X_1), \dots, g(X_n))$.
13. (3 pont) Bizonyítsuk be, hogy minden $f \in \mathcal{F}_\pi$ -hez egyértelműen létezik egy olyan $F_f(X, Y) \in \mathcal{O}_K[[X, Y]]$ formális csoport, melyre f endomorfizmusa F_f -nek. (Az ilyen formális csoportokat nevezik Lubin–Tate formális csoportoknak.)
14. (3 pont) Legyen $a \in \mathcal{O}_K$ tetszőleges és $f, g \in \mathcal{F}_\pi$. Igazoljuk, hogy egyértelműen létezik egy $[a]_{g,f}(T) \in T\mathcal{O}_K[[T]]$ hatványsor, melyre $[a]_{g,f}(T) = aT$ +magasabb fokú tagok, és $[a]_{g,f} \circ f = g \circ [a]_{g,f}$. Továbbá ekkor $[a]_{g,f}$ egy homomorfizmus F_f -ből F_g -be. Speciálisan F_f és F_g izomorfak.
15. (2 pont) Igazoljuk, hogy az $\mathcal{O}_K \rightarrow \text{End}(F_f)$, $a \mapsto [a]_f := [a]_{f,f}$ leképezés egy injektív gyűrűhomomorfizmus, melyre $[\pi]_f = f$.
16. (3 pont) Legyen $f \in \mathcal{F}_\pi$ tetszőleges (az egyszerűség kedvéért a 14. Feladat miatt vehetjük az $f(T) = \pi T + T^q$ polinomot) és jelöljük Λ_n -nel az $f^{(n)} = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_n$ polinom gyökeinek halmazát \mathbb{Q}_p algebrai lezártjában. Igazoljuk, Λ_n egy q^n elemű halmaz, amely \mathcal{O}_K -modulus a $+_{F_f}$ összeadásra és az $a \cdot_{F_f} \lambda := [a]_f(\lambda)$ szorzásra nézve ($a \in \mathcal{O}_K$, $\lambda \in \Lambda_n$). Mutassuk meg továbbá, hogy $\Lambda_n \cong \mathcal{O}_K/(\pi^n)$ mint \mathcal{O}_K -modulusok.
17. (4 pont) Legyen $K_{\pi,n} := K(\Lambda_n)$ az $f^{(n)}$ polinom felbontási teste K felett. Igazoljuk, hogy $\text{Gal}(K_{\pi,n}/K) \cong (\mathcal{O}_K/(\pi^n))^\times$, és hogy $K_{\pi,n}/K$ teljesen elágazó. Továbbá, hogy $K_{\pi,n}$ nem függ $f \in \mathcal{F}_\pi$ választásától, és π egy alkalmas $K_{\pi,n}$ -beli elem normája.