Algebrai Számelmélet

9. gyakorlat

2014. április 15.

1. Legyen M_i, $i \in I$ (ill. N_j, $j \in J$) egy direkt (ill. inverz) rendszere Abel csoportoknak, M, N pedig tetszőleges Abel-csoportok. Milyen feltételek mellett lehet a Hom-ot illetve $\otimes$-ot felcserélni a $\varinjlim$-mel, illetve $\varprojlim$-mel? Pl. igaz-e, hogy $\mathrm{Hom}(\varprojlim_i N_i, M) \cong \varprojlim_i \mathrm{Hom}(N_i, M)$ vagy $\varinjlim_i (M_i \otimes N) \cong (\varinjlim_i M_i) \otimes N$? Pozitív állítások darabja 4 pont, ellenpéldák 2 pont. (Ha <u>kell</u>, feltehetjük a végesen generáltságot, végességet, stb.)

Az alábbi feladatokban felépítjük a tökéletes p-karakterisztikájú gyűrűk Witt-gyűrűit. Legyen A egy kommutatív egységelemes gyűrű, melyben $p = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{p} \in A$ nem nullosztó és a természetes $A \to \varprojlim_n A/p^n A$ leképezés izomorfizmus (azaz A *p-adikusan teljes*). Tegyük fel továbbá, hogy $R := A/pA$ egy *tökéletes p-karakterisztikájú gyűrű*, azaz a p-edik hatványra emelés ("Frobenius") bijektív: minden $x \in R$-re van pontosan egy olyan $x^{p^{-1}} := y \in R$, melyre $y^p = x$. Az ilyen A gyűrűket szigorú p-gyűrűknek nevezzük. Például $A = \mathbb{Z}_p$ egy szigorú p-gyűrű.

2. (2 pont) Igazoljuk, hogy egy p-karakterisztikájú k testen a Frobenius endomorfizmus (azaz a p-edik hatványra emelés) mindig injektív, és pontosan akkor szürjektív, ha k tökéletes test (azaz k felett semmilyen irreducibilis polinomnak nincs többszörös gyöke). Adjunk példát nem tökéletes p-karakterisztikájú testre.

3. (2 pont) Igazoljuk, hogy egy p-karakterisztikájú R gyűrűn (kommutatív, egységelemes, és $\underbrace{1 + \cdots + 1}_{p} = 0$) a p-edik hatványra emelés pontosan akkor injektív, ha R redukált, azaz nincsenek benne nilpotens elemek.

4. (3 pont) Legyen A egy szigorú p-gyűrű, speciálisan $R = A/pA$ egy tökéletes p-karakterisztikájú gyűrű. Egy $x \in R$ elemnek jelöljük $\hat{x}$-pal egy tetszőleges (minden $x \in R$-re előre megválasztott) A-beli felemeltjét (azaz $x = \hat{x} + pA$). Igazoljuk, hogy $[x] := \lim_{n\to\infty} (\widehat{x^{p^{-n}}})^{p^n}$ limesz létezik az A-n levő p-adikus topológiában, azaz minden $M \geq 0$ egészre van olyan $N \geq 0$ egész, melyre $n, m \geq N$ esetén $(\widehat{x^{p^{-n}}})^{p^n} - (\widehat{x^{p^{-m}}})^{p^m} \in p^M A$. Igazoljuk továbbá, hogy $[xy] = [x][y]$.

A továbbiakban az lesz a célunk, hogy tetszőleges R tökéletes p-karakterisztikájú gyűrűhöz konstruáljunk egy olyan $W(R)$ szigorú p-gyűrűt, melyre $R \cong W(R)/pW(R)$. A $W(R)$ gyűrűt nevezzük az R gyűrű Witt gyűrűjének. $W(R)$ elemei $\sum_{i=0}^{\infty} p^i [x_i]$ alakú formális hatványsorok lesznek, ahol $x_i \in R$. Az $[x_i]$ formális kifejezések lesznek a multiplikatív felemeltek. A fenti hatványsorokon való összeadás és szorzaś definíciójához először a megszámlálható sok elemmel generált szabad tökéletes p-karakterisztikájú gyűrűk Witt gyűrűjét kell megkonstruálnunk, és megnéznünk, hogy abban hogy működik az összeadás illetve a szorzás. Legyen $X_0, X_1, \dots, Y_0, Y_1, \dots$ formális változóknak két végtelen sorozata, p pedig egy rögzített prímszám. Tekintsük továbbá minden $0 \leq n$-re és $0 \leq i$-re az X_i és Y_i változóknak egy-egy formális p^n-edik gyökét: $X_i^{p^{-n}}$, ill. $Y_i^{p^{-n}}$ (azaz ezek is formális változók, de a polinomgyűrűben kifaktorizálunk azokkal az azonosságokkal, hogy $(X_i^{p^{-n}})^p = X_i^{p^{-n+1}}$, ill. $(Y_i^{p^{-n}})^p = Y_i^{p^{-n+1}}$). Legyen

$$\begin{aligned}
\mathbb{Z}_p[X_i^{p^{-\infty}}, Y_i^{p^{-\infty}} \mid i \geq 0] &:= \bigcup_n \mathbb{Z}_p[X_i^{p^{-n}}, Y_i^{p^{-n}} \mid i \geq 0] \; ; \\
S &:= \varprojlim_n \mathbb{Z}_p[X_i^{p^{-\infty}}, Y_i^{p^{-\infty}} \mid i \geq 0]/(p^n) \; .
\end{aligned}$$

5. (3 pont) Igazoljuk, hogy S egy szigorú p-gyűrű. Speciálisan léteznek olyan $S_i, P_i \in S/pS = \mathbb{F}_p[X_i^{p^{-\infty}}, Y_i^{p^{-\infty}} \mid i \geq 0]$ polinomok, melyeknek multiplikatív felemeltjeire
$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=0}^{\infty} p^i X_i\right) + \left(\sum_{i=0}^{\infty} p^i Y_i\right) &= \sum_{i=0}^{\infty} p^i [S_i] \\
\left(\sum_{i=0}^{\infty} p^i X_i\right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} p^i Y_i\right) &= \sum_{i=0}^{\infty} p^i [P_i] \; .
\end{aligned}$$

6. (2 pont) Határozzuk meg az $S_0, S_1, P_0, P_1 \in \mathbb{F}_p[X_i^{p^{-\infty}}, Y_i^{p^{-\infty}} \mid i \geq 0]$ polinomokat.

7. (3 pont) Legyen R egy tetszőleges p-karakterisztikájú tökéletes gyűrű és $W(R) = \{r = (r_0, r_1, \dots) \mid r_i \in R, i \geq 0\} = R^{\mathbb{N}}$ mint halmaz. Tekintsük továbbá a következő műveleteket: $(r+s)_n := S_n(r_0, r_1, \dots, s_0, s_1, \dots)$, illetve $(rs)_n := P_n(r_0, r_1, \dots, s_0, s_1, \dots)$. Igazoljuk, hogy $W(R)$ egy szigorú p-gyűrű ezekkel a műveletekkel.

8. (3 pont) Igazoljuk a $W(R)$ Witt gyűrű alábbi univerzális tulajdonságát: ha A egy tetszőleges szigorút p-gyűrű és $\varphi\colon R \to A/pA$ gyűrűhomomorfizmus, akkor ennek egyértelműen létezik egy $\tilde{\varphi}\colon W(R) \to A$ felemeltje (azaz egy olyan $\tilde{\varphi}$ homomorfizmus, melyre $\tilde{\varphi}$ megegyezik φ-vel modulo p). Speciálisan W egy funktor. Megjegyzés: a $\mathrm{Frob}_p\colon R \to R$ homomorfizmus is felemelhető $W(R)$-be, ezt a felemeltet hívjuk Frobenius-felemeltnek.

9. (3 pont) Igazoljuk, hogy az $R \mapsto W(R)$ és az $A \mapsto A/pA$ funktorok egymás kváziinverzei, azaz minden R tökéletes p-karakterisztikájú gyűrűre létezik egy $\Phi_R\colon R \to W(R)/pW(R)$ természetes izomorfizmus, illetve minden A szigorú p-gyűrűre létezik egy $\Psi_A\colon A \to W(A/pA)$ természetes izomorfizmus. A természetesség itt (pl. R esetében) azt jelenti, hogy ha $f\colon R_1 \to R_2$ egy gyűrűhomomorfizmusa tökéletes p-karakterisztikájú gyűrűknek, akkor a
$$\begin{array}{ccc}
R_1 & \xrightarrow{f} & R_2 \\
{\scriptstyle \Phi_{R_1}} \big\downarrow & & \big\downarrow {\scriptstyle \Phi_{R_2}} \\
W(R_1)/pW(R_1) & \xrightarrow[f_*]{} & W(R_2)/W(R_2)
\end{array}$$
diagram kommutatív. Tehát a szigorú p-gyűrűk kategóriája ekvivalens a tökéletes p-karakterisztikájú gyűrűk kategóriájával.