

# Algebrai Számelmélet

## 8. gyakorlat

2015. november 11.

- (3 pont) Legyen  $K$  egy test, melyen van egy  $|\cdot|$  arkhimédieszi abszolútérték, melyre nézve  $K$  teljes. Igazoljuk, hogy  $K$  izomorf  $\mathbb{R}$ -rel vagy  $\mathbb{C}$ -vel úgy, hogy az izomorfizmus még homeomorfizmust is indukál a  $K$ -n lévő  $|\cdot|$  által meghatározott topológiában.
- (3 pont) Igazoljuk, hogy ha  $K/\mathbb{Q}$  egy véges bővítés, akkor  $K$  minden nemtriviális abszolútérték ekvivalens vagy egy  $\mathcal{O}_K$ -beli prímeálhoz tartozó diszkrét értékelésből származó abszolútértékkel (nemarkhimédieszi eset), vagy a  $\mathbb{C}$ -n lévő szokásos abszolútérték  $K$ -ra való megszorításával egy  $\tau: K \rightarrow \mathbb{C}$  beágyazás mentént (arkhimédieszi eset). Két ilyen abszolútérték pontosan akkor ekvivalens, ha mindkettő arkhimédieszi, és a két megfelelő  $\tau_1, \tau_2: K \rightarrow \mathbb{C}$   $\mathbb{Q}$ -homomorfizmus egymás konjugáltja.
- (2 pont) Írjuk fel a  $2/3$  és a  $-2/3$  5-adikus alakban.
- (4 pont) Igazoljuk, hogy egy  $\sum_{i=-m}^{\infty} a_i p^i$  ( $a_i = 0, 1, \dots, p-1$ ,  $i \geq -m$ ) alakba írt  $p$ -adikus szám pontosan akkor racionális, ha jegyeinek sorozata egy bizonyos ponttól kezdve periodikus.
- (3 pont) Igazoljuk, hogy az  $a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n + \dots \in \mathbb{Z}_p$  ( $a_i = 0, 1, \dots, p-1$ )  $p$ -adikus egész szám pontosan akkor egység, ha  $a_0 \neq 0$ . Speciálisan  $\mathbb{Z}_p$  egy lokális gyűrű  $p\mathbb{Z}_p$  maximális ideállal.
- (3 pont) Oldjuk meg az  $x^2 = 2$  egyenletet  $\mathbb{Z}_7$ -ben.
- (3 pont) Igazoljuk, hogy a  $\mathbb{Q}_p$  test minden automorfizmusa folytonos, speciálisan identikus.
- (2 pont) Legyen  $n \geq 1$  egész, és  $n = a_0 + a_1 p + \dots + a_r p^r$  a  $p$ -es számrendszerbeli alakja ( $0 \leq a_i < p$ ). Legyen továbbá  $s = a_0 + a_1 + \dots + a_r$ . Igazoljuk, hogy  $v_p(n!) = \frac{n-s}{p-1}$ .
- (2 pont) Igazoljuk, hogy az  $1, 1/10, 1/100, \dots, 1/10^n, \dots$  sorozat semmilyen  $p$ -re sem konvergál  $\mathbb{Q}_p$ -ben.
- (3 pont) Legyen  $\varepsilon \in 1 + p\mathbb{Z}_p$  és  $\alpha = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots$  egy  $p$ -adikus egész, melynek jelöljük  $s_n$ -nel az  $n$ -edik kezdőszeletét, azaz  $s_n = a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n \in \mathbb{Z}$ . Igazoljuk, hogy az  $\varepsilon^\alpha := \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon^{s_n}$  limesz létezik  $\mathbb{Z}_p$ -ben és így  $1 + p\mathbb{Z}_p$  egy  $-$  multiplikatívan írt  $-$   $\mathbb{Z}_p$ -modulus.
- (3 pont) Igazoljuk, hogy ha  $(a, p) = 1$  ( $a \in \mathbb{Z}$ ), akkor az  $a^{p^n}$  sorozat konvergál  $\mathbb{Q}_p$ -ben.

12. (2 pont) Igazoljuk, hogy ha  $p \neq q$  prímek, akkor a  $\mathbb{Q}_p$  és a  $\mathbb{Q}_q$  testek nem izomorfak.
13. (2 pont) A  $\mathbb{Q}_p$  test algebrai lezártja  $\mathbb{Q}_p$ -nek végtelen bővítése.
14. (5 pont) Jelöljük  $\mathbb{Z}_p[[X]]$ -szel a  $\mathbb{Z}_p$  feletti formális hatványsorok gyűrűjét. Legyen  $g \in \mathbb{Z}_p[[X]]$  tetszőleges és  $f(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n + \cdots \in \mathbb{Z}_p[[X]]$  olyan, hogy  $p \mid a_i$  minden  $0 \leq i \leq n-1$ -re, de  $p \nmid a_n$ . Igazoljuk, hogy ebben a szituációban működik a *maradékos osztás*, azaz egyértelműen létezik egy  $q \in \mathbb{Z}_p[[X]]$  hatványsor, és egy  $r \in \mathbb{Z}_p[X]$  legfeljebb  $n-1$ -edfokú *polinom*, melyre  $g = qf + r$ .
15. (3 pont) (“ $p$ -adikus Weierstraß-féle előkészítési tétel”) Legyen  $0 \neq f(X) \in \mathbb{Z}_p[[X]]$ . Ekkor egyértelműen létezik egy  $f(X) = p^\mu g(X)u(X)$  felírás, ahol  $\mu \geq 0$  egész,  $u(X) \in \mathbb{Z}_p[[X]]^\times$  egy egység,  $g(X) \in \mathbb{Z}_p[X]$  pedig egy normált polinom, melynek minden főegyütthatótól különböző együtthatója osztható  $p$ -vel.