

# Algebrai Számelmélet

## 5. gyakorlat

2015. október 14.

- (a) (2 pont) Igazoljuk, hogy egy  $p$  páratlan prím pontosan akkor ágazik el  $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ -ben, ha  $p \mid d$  ( $d$  négyzetmentes). Továbbá pontosan akkor marad prím, ha  $\left(\frac{d}{p}\right) = -1$ , ha pedig  $\left(\frac{d}{p}\right) = 1$ , akkor felbomlik két különböző prímeál szorzatára.

(b) (2 pont) Mi a helyzet ha  $p = 2$ ?
- Bontsuk fel a 7-et és a 11-et  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$  (1+1 pont), illetve  $\mathbb{Q}(\alpha)$  (2+2 pont) egészeinek gyűrűjében, ahol  $\alpha^3 - \alpha - 4 = 0$  (használhatjuk az egészek gyűrűjének leírását).
- (3 pont) Legyen  $f_n$  az  $n$ -edik eleme a Fibonacci-sorozatnak ( $f_0 = 0$ ,  $f_1 = 1$ ). Igazoljuk, hogy ha  $p \neq 2, 5$  prímszám, akkor  $f_p \equiv \left(\frac{p}{5}\right) \pmod{p}$ .
- (2 pont) Legyenek  $I, J \triangleleft \mathcal{O}_K$  ideálok és  $\mathcal{O}_L$  az  $\mathcal{O}_K$  egész lezártja az  $L/K$  szeparábilis bővítésben. Igazoljuk, hogy  $I = I\mathcal{O}_L \cap \mathcal{O}_K$  és  $I \mid J \Leftrightarrow I\mathcal{O}_L \mid J\mathcal{O}_L$ .
- (3 pont) Mutassunk példát olyan  $\mathbb{Q} \leq K_1, K_2$  véges bővítésekre és egy  $p$  prímre, ami teljesen elágazik a  $K_1$  és  $K_2$  testek mindegyikében, de a  $K_1K_2$  kompozitumban nem. (Segítség: Választhatunk kvadratikus bővítéseket is.)
- (a) (3 pont) Igazoljuk, hogy ha  $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\alpha]$  alkalmas  $\alpha$ -val, akkor egy  $p \in \mathbb{Z}$  prímet legfeljebb  $p$  darab olyan  $\mathfrak{p}_i \triangleleft \mathcal{O}_K$  prímeál oszthat, melyre  $f_i = 1$  (azaz  $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_i \cong \mathbb{F}_p$ ).

(b) (2 pont) Igazoljuk, hogy a 3 teljesen felbomlik  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{7}, \sqrt{10})$ -ben, azaz az (a) rész szerint nincs olyan  $\alpha \in K$ , melyre  $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\alpha]$ .

(c) (3 pont) Találjunk egy olyan  $0 < N \in \mathbb{Z}$  egész számot és egy alkalmas  $\alpha \in K$  elemet, melyre  $\mathcal{O}_K[1/N] = \mathbb{Z}[1/N][\alpha]$ , és bontsuk prímeálok szorzatára  $\mathcal{O}_K$ -ban az összes  $p \mid N$  prímet.
- (4 pont) Legyen  $\mathbb{Q} \leq K$  egy véges bővítés. Igazoljuk, hogy egy  $\mathfrak{p} \triangleleft \mathcal{O}_K$  prím teljesen felbomlik az  $(K \leq)L$  és az  $(K \leq)L'$  testekben, akkor teljesen felbomlik a két test  $LL'$  kompozitumában is (azaz  $\overline{K}$  legszűkebb olyan résztestében, ami  $L$ -et és  $L'$ -t is tartalmazza).
- (3 pont) Legyenek  $\mathbb{Q} \leq K \leq L$  véges bővítések és  $K \leq L \leq F$  az  $L/K$  bővítés normális lezártja. Igazoljuk, hogy egy  $\mathfrak{p} \triangleleft \mathcal{O}_K$  prím pontosan akkor bomlik fel teljesen  $L$ -ben, ha teljesen felbomlik  $F$ -ben.
- (3 pont) Igazoljuk, hogy a  $\mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{-5})/\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$  bővítés semelyik  $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ -beli prím-ben sem ágazik el.