Algebrai Számelmélet

3. gyakorlat

2015. szeptember 30.

1. (3 pont) Igazoljuk a Kínai maradéktételt Dedekind gyűrűkre. Tehát ha $A \lhd \mathcal{O}$ egy ideál az $\mathcal{O}$ Dedekind gyűrűben, melynek prímideálok szorzatára való bontása $A = P_1^{\nu_1} \dots P_t^{\nu_t}$, akkor
$$\mathcal{O}/A \cong \bigoplus_{i=1}^{t} \mathcal{O}/P_i^{\nu_i} \ .$$

---

2. (2 pont) Igazoljuk, hogy egy $\Gamma \subset V$ rács pontosan akkor teljes, ha V/Γ kompakt.

3. (2 pont) Legyenek $L_i(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ $(i = 1, \dots, n)$ valós homogén lineáris polinomok, melyekre $\det((a_{ij}))_{ij} \neq 0$ és $c_1, \dots, c_n$ pozitív valós számok, melyekre $c_1 \dots c_n > |\det((a_{ij}))_{ij}|$. Mutassuk meg, hogy vannak olyan $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}$ egész számok, melyekre $L_i(m_1, \dots, m_n)| < c_i$ $(i = 1, \dots, n)$.

---

4. (2+2 pont) Igazoljuk, hogy a
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} K & \to & K_{\mathbb{C}} \\ z \otimes \alpha & \mapsto & z \cdot (j\alpha) \end{array}$$
leképezés egy gyűrűizomorfizmus. Igazoljuk továbbá, hogy a megszorítása $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} K$-ra szintén izomorfizmus $K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ és $K_{\mathbb{R}}$ között.

5. (1 pont darabja) Igazoljuk, hogy $\mathbb{Q}$ azon másodfokú bővítéseiben, melyeknek diszkriminánsa rendre $5, 8, 11, -3, -4, -7, -8, -11$, igaz az elemekre a számelmélet alaptétele.

6. (*a*) (4 pont) Egy $0 < t$ valós számra legyen $X_t := \{z \in K_{\mathbb{R}} \mid \sum_\tau |z_\tau| < t\}$. Igazoljuk, hogy $\mathrm{vol}(X_t) = 2^r \pi^s \frac{t^n}{n!}$.

   (*b*) (4 pont) Igazoljuk, hogy ha $|K/\mathbb{Q}| = n$, akkor $|d_K|^{1/2} \geq \frac{n^n}{n!} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n/2}$. (Segítség: Válasszuk meg t-t úgy, hogy $\mathrm{vol}(X_t) > 2^n \mathrm{vol}(\Gamma)$ teljesüljön, ahol $\Gamma = j(\mathcal{O}_K) \subset K_{\mathbb{R}}$. Alkalmazzuk a számtani-mértani közép közti egyenlőtlenséget a $|\tau(\alpha)|$ számokra, ahol $0 \neq \alpha \in \mathcal{O}_K$ a Minkowski-féle rácsponttétel alapján garantált elem, melyre $j(\alpha) \in X_t$. Majd vegyük észre, hogy $1 \leq |N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha)|$.)

   (*c*) (1 pont) Igazoljuk, hogy ha a $|K : \mathbb{Q}|$ fokszám tart végtelenhez, akkor a d_K diszkrimináns is. Továbbá ha $n > 1$ (azaz $K \neq \mathbb{Q}$), akkor $d_K > 1$.

7. (*a*) (3 pont) Legyen $A \lhd \mathcal{O}_K$ egy olyan ideál, melynek rendje m az osztálycsoportban (azaz $A^m = (\alpha)$ főideál). Bizonyítsuk be, hogy $A\mathcal{O}_L = (\beta)$, ahol $L = K(\beta)$ és $\beta^m = \alpha$.

(*b*) (1 pont) Igazoljuk, hogy minden $K/\mathbb{Q}$ véges bővítéshez van olyan L/K véges bővítés, melyben minden $\mathcal{O}_K$-beli ideál főideállá válik.

(*c*) (2 pont) Igazoljuk, hogy az algebrai egészek Ω gyűrűje egy *Bézout-gyűrű*, azaz minden végesen generált ideálja főideál (és integritási tartomány, de persze nem noether).

8. (*a*) (3 pont) Igazoljuk, hogy Bézout-gyűrű felett minden végesen generált torziómentes modulus szabad.

   (*b*) (2 pont) Igazoljuk, hogy $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{C}[[x^{1/n}]]$ Bézout gyűrű.

   (*c*) (3 pont) Egy $0 < r < 1$ valós számra legyen R_r az $\{z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < 1\}$ körgyűrűn komplex differenciálható függvények gyűrűje. Igazoljuk, hogy $\bigcup_{r<1} R_r$ egy Bézout-gyűrű.

9. Az alábbi feladatban a Minkowski-elmélet multiplikatív verziója segítségével adjuk meg az $\mathcal{O}_K^\times$ egységcsoport mint Abel-csoport rangját.

   (*a*) (3 pont) Legyen $K_{\mathbb{C}}^\times = \prod_\tau \mathbb{C}^\times$ a $K_{\mathbb{C}}$ gyűrű multiplikatív csoportja, továbbá $N\colon K_{\mathbb{C}}^\times \to \mathbb{C}^\times$ az a csoporthomomorfizmus, melyet a koordináták szorzatával értelmezünk. Továbbá definiáljuk a $l := \log|\cdot|\colon K_{\mathbb{C}}^\times \to \prod_\tau \mathbb{R}$ homomorfizmust koordinátánként. Igazoljuk, hogy $l \circ j\colon \mathcal{O}_K^\times \to \prod_\tau \mathbb{R}$ magja éppen az $\mathcal{O}_K^\times$ torziórészcsoportja, azaz a K-ban levő egységgyökök $\mu(K)$ csoportja.

   (*b*) (2 pont) Igazoljuk, hogy ha $\alpha \in \mathcal{O}_K^\times$, akkor $l \circ j(\alpha)$-t fixálja a komplex konjugálás $\prod_\tau \mathbb{R}$-en (ezen a komplex konjugálás csak a τ-kat permutálja). Mutassuk meg továbbá, hogy $l \circ j(\alpha)$ koordinátáinak összege 0.

   (*c*) (5 pont) Igazoljuk, hogy $l \circ j(\mathcal{O}_K^\times)$ egy teljes rács a H altérben, ahol

$$H = \{x_\tau \in \prod_\tau \mathbb{R} \mid \sum_\tau x_\tau = 0 \text{ és } x_{\sigma_k} = x_{\overline{\sigma_k}}\ (k = 1, \dots, s)\} .$$

   Speciálisan $\mathcal{O}_K \cong \mu(K) \times \mathbb{Z}^{r+s-1}$ (mint Abel-csoport).