

Algebrai Számelmélet

9. gyakorlat

2014. április 15.

1. (3 pont) Igazoljuk, hogy egy végtelen algebrai bővítése egy K teljes testnek sosem lehet teljes a kiterjesztett értékelésre nézve.

Az alábbi feladatokban felépítjük a tökéletes p -karakterisztikájú gyűrűk Witt-gyűrűit. Legyen A egy kommutatív egységelemes gyűrű, melyben $p = \underbrace{1 + \dots + 1}_p \in A$ nem nullosztó és a természetes $A \rightarrow \varprojlim_n A/p^n A$ leképezés izomorfizmus (azaz A p -adikusan teljes). Tegyük fel továbbá, hogy $R := A/pA$ egy tökéletes p -karakterisztikájú gyűrű, azaz a p -edik hatványra emelés („Frobenius”) bijektív: minden $x \in R$ -re van pontosan egy olyan $x^{p^{-1}} := y \in R$, melyre $y^p = x$. Az ilyen A gyűrűket szigorú p -gyűrűknek nevezzük. Például $A = \mathbb{Z}_p$ egy szigorú p -gyűrű.

2. (2 pont) Igazoljuk, hogy egy p -karakterisztikájú k testen a Frobenius endomorfizmus (azaz a p -edik hatványra emelés) mindig injektív, és pontosan akkor szürjektív, ha k tökéletes test (azaz k felett semmilyen irreducibilis polinomnak nincs többszörös gyöke). Adjunk példát nem tökéletes p -karakterisztikájú testre.
3. (2 pont) Igazoljuk, hogy egy p -karakterisztikájú R gyűrűn (kommutatív, egységelemes, és $\underbrace{1 + \dots + 1}_p = 0$) a p -edik hatványra emelés pontosan akkor injektív, ha R redukált, azaz nincsenek benne nilpotens elemek.
4. (3 pont) Legyen A egy szigorú p -gyűrű, speciálisan $R = A/pA$ egy tökéletes p -karakterisztikájú gyűrű. Egy $x \in R$ elemnek jelöljük \hat{x} -pal egy tetszőleges (minden $x \in R$ -re előre megválasztott) A -beli felemeltjét (azaz $x = \hat{x} + pA$). Igazoljuk, hogy $[x] := \lim_{n \rightarrow \infty} (\widehat{x^{p^{-n}}})^{p^n}$ limesz létezik az A -n levő p -adikus topológiában, azaz minden $M \geq 0$ egészre van olyan $N \geq 0$ egész, melyre $n, m \geq N$ esetén $(\widehat{x^{p^{-n}}})^{p^n} - (\widehat{x^{p^{-m}}})^{p^m} \in p^M A$. Igazoljuk továbbá, hogy $[xy] = [x][y]$.

A továbbiakban az lesz a célunk, hogy tetszőleges R tökéletes p -karakterisztikájú gyűrűhöz konstruáljunk egy olyan $W(R)$ szigorú p -gyűrűt, melyre $R \cong W(R)/pW(R)$. A $W(R)$ gyűrűt nevezzük az R gyűrű Witt gyűrűjének. $W(R)$ elemei $\sum_{i=0}^{\infty} p^i [x_i]$ alakú formális hatványsorok lesznek, ahol $x_i \in R$. Az $[x_i]$ formális kifejezések lesznek a multiplikatív felemelték. A fenti hatványsorokon való összeadás és szorzás definíciójához először a megszámlálható sok elemmel generált szabad tökéletes p -karakterisztikájú gyűrűk Witt gyűrűjét kell megkonstruálnunk, és megnéznünk, hogy abban hogy működik az összeadás illetve a szorzás. Legyen

$X_0, X_1, \dots, Y_0, Y_1, \dots$ formális változóknak két végtelen sorozata, p pedig egy rögzített prímszám. Tekintsük továbbá minden $0 \leq n$ -re és $0 \leq i$ -re az X_i és Y_i változóknak egy-egy formális p^n -edik gyökét: $X_i^{p^{-n}}$, ill. $Y_i^{p^{-n}}$ (azaz ezek is formális változók, de a polinomgyűrűben kifaktorizálunk azokkal az azonosságokkal, hogy $(X_i^{p^{-n}})^p = X_i^{p^{-n+1}}$, ill. $(Y_i^{p^{-n}})^p = Y_i^{p^{-n+1}}$). Legyen

$$\mathbb{Z}_p[X_i^{p^{-\infty}}, Y_i^{p^{-\infty}} \mid i \geq 0] := \bigcup_n \mathbb{Z}_p[X_i^{p^{-n}}, Y_i^{p^{-n}} \mid i \geq 0];$$

$$S := \varprojlim_n \mathbb{Z}_p[X_i^{p^{-\infty}}, Y_i^{p^{-\infty}} \mid i \geq 0]/(p^n).$$

5. (3 pont) Igazoljuk, hogy S egy szigorú p -gyűrű. Speciálisan léteznek olyan $S_i, P_i \in S/pS = \mathbb{F}_p[X_i^{p^{-\infty}}, Y_i^{p^{-\infty}} \mid i \geq 0]$ polinomok, melyeknek multiplikatív felemeltjeire

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} p^i X_i \right) + \left(\sum_{i=0}^{\infty} p^i Y_i \right) = \sum_{i=0}^{\infty} p^i [S_i]$$

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} p^i X_i \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} p^i Y_i \right) = \sum_{i=0}^{\infty} p^i [P_i].$$

6. (2 pont) Határozzuk meg az $S_0, S_1, P_0, P_1 \in \mathbb{F}_p[X_i^{p^{-\infty}}, Y_i^{p^{-\infty}} \mid i \geq 0]$ polinomokat.
7. (3 pont) Legyen R egy tetszőleges p -karakterisztikájú tökéletes gyűrű és $W(R) = \{r = (r_0, r_1, \dots) \mid r_i \in R, i \geq 0\} = R^{\mathbb{N}}$ mint halmaz. Tekintsük továbbá a következő műveleteket: $(r+s)_n := S_n(r_0, r_1, \dots, s_0, s_1, \dots)$, illetve $(rs)_n := P_n(r_0, r_1, \dots, s_0, s_1, \dots)$. Igazoljuk, hogy $W(R)$ egy szigorú p -gyűrű ezekkel a műveletekkel.
8. (3 pont) Igazoljuk a $W(R)$ Witt gyűrű alábbi univerzális tulajdonságát: ha A egy tetszőleges szigorú p -gyűrű és $\varphi: R \rightarrow A/pA$ gyűrűhomomorfizmus, akkor ennek egyértelműen létezik egy $\tilde{\varphi}: W(R) \rightarrow A$ felemeltje (azaz egy olyan $\tilde{\varphi}$ homomorfizmus, melyre $\tilde{\varphi}$ megegyezik φ -vel modulo p). Speciálisan W egy funktor. Megjegyzés: a $\text{Frob}_p: R \rightarrow R$ homomorfizmus is felemelhető $W(R)$ -be, ezt a felemeltet hívjuk Frobenius-felemeltnek.
9. (3 pont) Igazoljuk, hogy az $R \mapsto W(R)$ és az $A \mapsto A/pA$ funktorok egymás kváziinverzei, azaz minden R tökéletes p -karakterisztikájú gyűrűre létezik egy $\Phi_R: R \rightarrow W(R)/pW(R)$ természetes izomorfizmus, illetve minden A szigorú p -gyűrűre létezik egy $\Psi_A: A \rightarrow W(A/pA)$ természetes izomorfizmus. A természetesség itt (pl. R esetében) azt jelenti, hogy ha $f: R_1 \rightarrow R_2$ egy gyűrűhomomorfizmusa tökéletes p -karakterisztikájú gyűrűknek, akkor a

$$\begin{array}{ccc} R_1 & \xrightarrow{f} & R_2 \\ \Phi_{R_1} \downarrow & & \downarrow \Phi_{R_2} \\ W(R_1)/pW(R_1) & \xrightarrow{f_*} & W(R_2)/pW(R_2) \end{array}$$

diagram kommutatív. Tehát a szigorú p -gyűrűk kategóriája ekvivalens a tökéletes p -karakterisztikájú gyűrűk kategóriájával.