Algebrai Számelmélet

8. gyakorlat

2014. április 8.

1. (3 pont) Legyen K egy test, melyen van egy $|\cdot|$ arkhimédeszi abszolútérték, melyre nézve K teljes. Igazoljuk, hogy K izomorf $\mathbb{R}$-rel vagy $\mathbb{C}$-vel úgy, hogy az izomorfizmus még homeomorfizmust is indukál a K-n lévő $|\cdot|$ által meghatározott topológiában.
2. (3 pont) Igazoljuk, hogy ha $K/\mathbb{Q}$ egy véges bővítés, akkor K minden nemtriviális abszolútérték ekvivalens vagy egy $\mathcal{O}_K$-beli prímideálhoz tartozó diszkrét értékelésből származó abszolútértékkel (nemarkhimédeszi eset), vagy a $\mathbb{C}$-n lévő szokásos abszolútérték K-ra való megszorításával egy $\tau\colon K \to \mathbb{C}$ beágyazás mentént (arkhimédeszi eset). Két ilyen abszolútérték pontosan akkor ekvivalens, ha mindkettő arkhimédeszi, és a két megfelelő $\tau_1, \tau_2\colon K \to \mathbb{C}$ $\mathbb{Q}$-homomorfizmus egymás konjugáltja.
3. (2 pont) Írjuk fel a $2/3$ és a $-2/3$ 5-adikus alakban.
4. (4 pont) Igazoljuk, hogy egy $\sum_{i=-m}^{\infty} a_i p^i$ $(a_i = 0, 1, \ldots, p-1,\ i \geq -m)$ alakba írt p-adikus szám pontosan akkor racionális, ha jegyeinek sorozata egy bizonyos ponttól kezdve periodikus.
5. (3 pont) Igazoljuk, hogy az $a_0 + a_1 p + \cdots + a_n p + \cdots \in \mathbb{Z}_p$ $(a_i = 0, 1, \ldots, p-1)$ p-adikus egész szám pontosan akkor egység, ha $a_0 \neq 0$. Speciálisan $\mathbb{Z}_p$ egy lokális gyűrű $p\mathbb{Z}_p$ maximális ideállal.
6. (3 pont) Oldjuk meg az $x^2 = 2$ egyenletet $\mathbb{Z}_7$-ben.
7. (3 pont) Igazoljuk, hogy a $\mathbb{Q}_p$ test minden automorfizmusa folytonos, speciálisan identikus.
8. (2 pont) Legyen $n \geq 1$ egész, és $n = a_0 + a_1 p + \cdots + a_r p^r$ a p-es számrendszerbeli alakja $(0 \leq a_i < p)$. Legyen továbbá $s = a_0 + a_1 + \cdots + a_r$. Igazoljuk, hogy $v_p(n!) = \frac{n-s}{p-1}$.
9. (2 pont) Igazoljuk, hogy az $1, 1/10, 1/100, \ldots, 1/10^n, \ldots$ sorozat semmilyen p-re sem konvergál $\mathbb{Q}_p$-ben.
10. (3 pont) Legyen $\varepsilon \in 1 + p\mathbb{Z}_p$ és $\alpha = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots$ egy p-adikus egész, melynek jelöljük s_n-nel az n-edik kezdőszeletét, azaz $s_n = a_0 + a_1 p + \cdots + a_n p^n \in \mathbb{Z}$. Igazoljuk, hogy az $\varepsilon^\alpha := \lim_{n\to\infty} \varepsilon^{s_n}$ limesz létezik $\mathbb{Z}_p$-ben és így $1 + p\mathbb{Z}_p$ egy – multiplikatívan írt – $\mathbb{Z}_p$-modulus.
11. (3 pont) Igazoljuk, hogy ha $(a, p) = 1$ $(a \in \mathbb{Z})$, akkor az a^{p^n} sorozat konvergál $\mathbb{Q}_p$-ben.

12. (2 pont) Igazoljuk, hogy ha $p \neq q$ prímek, akkor a $\mathbb{Q}_p$ és a $\mathbb{Q}_q$ testek nem izomorfak.

13. (2 pont) A $\mathbb{Q}_p$ test algebrai lezártja $\mathbb{Q}_p$-nek végtelen bővítése.

14. (5 pont) Jelöljük $\mathbb{Z}_p[[X]]$-szel a $\mathbb{Z}_p$ feletti formális hatványsorok gyűrűjét. Legyen $g \in \mathbb{Z}_p[[X]]$ tetszőleges és $f(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n + \cdots \in \mathbb{Z}_p[[X]]$ olyan, hogy $p \mid a_i$ minden $0 \leq i \leq n-1$-re, de $p \nmid a_n$. Igazoljuk, hogy ebben a szituációban működik a *maradékos osztás*, azaz egyértelműen létezik egy $q \in \mathbb{Z}_p[[X]]$ hatványsor, és egy $r \in \mathbb{Z}_p[X]$ legfeljebb $n-1$-edfokú *polinom*, melyre $g = qf + r$.

15. (3 pont) („p-adikus Weierstraß-féle előkészítési tétel") Legyen $0 \neq f(X) \in \mathbb{Z}_p[[X]]$. Ekkor egyértelműen létezik egy $f(X) = p^\mu g(X)u(X)$ felírás, ahol $\mu \geq 0$ egész, $u(X) \in \mathbb{Z}_p[[X]]^\times$ egy egység, $g(X) \in \mathbb{Z}_p[X]$ pedig egy normált polinom, melynek minden főegyütthatótól különböző együtthatója osztható p-vel.