

Algebrai Számelmélet

4. gyakorlat

2014. március 11.

1. (2 pont) Legyen R és R' egy integritási tartomány és $0 \notin S \subset R$ egy multiplikatívan zárt halmaz. Tegyük fel továbbá, hogy $\varphi: R \rightarrow R'$ egy olyan gyűrűhomomorfizmus, melyre $\varphi(S) \subseteq R'^{\times}$. Igazoljuk, hogy ekkor φ egyértelműen kiterjed egy $\tilde{\varphi}: RS^{-1} \rightarrow R'$ gyűrűhomomorfizmussá.
2. (3 pont) Legyen R egy integritási tartomány és $0 \notin S \subset R$ egy multiplikatívan zárt halmaz. Igazoljuk, hogy RS^{-1} egy lapos R -modulus, azaz a vele vett tenzorszorzat egzakt.
3. (3 pont) Legyen R egy integritási tartomány és $f: M \rightarrow N$ egy R -homomorfizmus az M, N R -modulusok között. Igazoljuk, hogy az alábbiak ekvivalensek:
 - (i) f injektív (szürjektív);
 - (ii) $f_{\mathfrak{p}}: M_{\mathfrak{p}} \rightarrow N_{\mathfrak{p}}$ injektív minden $\mathfrak{p} \triangleleft R$ prímeálra;
 - (iii) $f_{\mathfrak{m}}: M_{\mathfrak{m}} \rightarrow N_{\mathfrak{m}}$ injektív minden $\mathfrak{m} \triangleleft R$ maximális ideálra.Itt $M_{\mathfrak{p}} = R_{\mathfrak{p}} \otimes_R M$, $M_{\mathfrak{m}} = R_{\mathfrak{m}} \otimes_R M$, $N_{\mathfrak{p}} = R_{\mathfrak{p}} \otimes_R N$ és $N_{\mathfrak{m}} = R_{\mathfrak{m}} \otimes_R N$.
4. (3 pont) Legyen R integritási tartomány és $0 \notin S \subset R$ egy multiplikatívan zárt halmaz. Igazoljuk, hogy ha RS^{-1} egész R felett, akkor $RS^{-1} = R$.
5. (3 pont) (Nakayama Lemma) Legyen R egy lokális gyűrű $\mathfrak{m} \triangleleft R$ maximális ideállal és M egy végesen generált R -modulus. Igazoljuk, hogy ha egy $N \leq M$ részmodulusra $M = N + \mathfrak{m}M$, akkor $M = N$.
6. (a) (4 pont) Legyen $(\mathcal{O}, \mathfrak{m})$ egy lokális noether gyűrű. Igazoljuk, hogy $\bigcap_{k \geq 1} \mathfrak{m}^k = 0$.
(b) (3 pont) Igazoljuk, hogy egy $(\mathcal{O}, \mathfrak{m})$ noether lokális integritási tartomány pontosan akkor diszkrét értékelésgyűrű, ha $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ egy egydimenziós vektortér \mathcal{O}/\mathfrak{m} felett.
(c) (3 pont) 2. feladatsor 10-es feladat.
7. (3 pont) Legyen K egy test és $v: K^{\times} \rightarrow \mathbb{Z}$ egy szürjektív csoportomorfizmus és legyen $v(0) = \infty$. Tegyük fel, hogy $v(x+y) \geq \min(v(x), v(y))$. Igazoljuk, hogy $\mathcal{O} := \{\alpha \in K \mid v(\alpha) \geq 0\}$ egy diszkrét értékelésgyűrű.
8. (3 pont) Igazoljuk, hogy egy noether-féle integritási tartomány pontosan diszkrét értékelésgyűrű, ha egészre zárt és egyetlen nemnulla prímeálja van.

9. (3 pont) Legyen \mathcal{O} egy Dedekind gyűrű és k egy pozitív egész. Minden $1 \leq i \leq k$ -ra legyen $\mathfrak{p}_i \triangleleft \mathcal{O}$ egy prímeál, $x_i \in K$ (ahol K a hányadostest) és $n_i \in \mathbb{Z}$. Igazoljuk, hogy van olyan $x \in K$, melyre $v_{\mathfrak{p}_i}(x - x_i) \geq n_i$ ($i = 1, \dots, k$) és $v_{\mathfrak{p}}(x) \geq 0$ minden $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_i$ prímeálra.
10. (3 pont) Legyen K/\mathbb{Q} egy véges bővítés, \mathcal{O}_K az egészek gyűrűje, S pedig egy \mathcal{O}_K -beli (nemnulla) prímeálokból álló véges halmaz és $X = \text{Spec}(\mathcal{O}_K) \setminus S$. Igazoljuk, hogy $Cl(\mathcal{O}_K(X))$ véges, továbbá $\mathcal{O}_K(X)^\times \cong \mu(K) \times \mathbb{Z}^{|S|+r+s-1}$, ahol r a valós beágyazások, s pedig a tisztán képzetes beágyazások párjainak száma.
11. (3 pont) (Newton poligon) Legyen \mathcal{O} diszkrét értékelésgyűrű K hányadostesttel és $v: K^\times \rightarrow \mathbb{Z}$ értékeléssel. Ha $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ egy n -edfokú K -beli együtthatós polinom, akkor f Newton-poligonja a síkon a $(-i, v(a_i))$ rácspontok alsó konvex burka (tehát egy $(-n, v(a_n))$ -et $(0, v(a_0))$ -lal összekötő konvex töröttvonal, melynek csúcsai a $(-i, v(a_i))$ pontok közül kerülnek ki, és alatta nincs ilyen rácspont). Jelöljük továbbá $S(f)$ -fel a Newton-poligon meredekségeinek a multihalmazát: azaz $S(f)$ egy n elemű multihalmaz, melyben minden s racionális szám a Newton-poligon s -meredekségű részének x -tengelyre vett vetületének hossza szerinti multiplicitással szerepel. Igazoljuk, hogy $S(fg) = S(f) \cup S(g)$. Speciálisan ha $f(x) \in K[x]$ Newton-poligon egyetlen szakaszból áll, melyen a két szélén kívül nincs más rácspont, akkor f irreducibilis.