Vizsgatémakörök (Algebra4 Matematikus)

A múlt félévhez hasonlóan a szóbeli vizsgán mindenki egy témakört kap az alábbiak közül (sorsolás után), amiből kérdezek. Fontos, hogy mindent értsetek (bizonyításokat is), tudjatok példákat és ellenpéldákat mondani, tudjátok, hogy melyik lemma min múlik és a tételekhez hogy (és melyik lépésben) használtuk őket, ill. a tétel feltételeit. Felkészülési idő nincs, viszont a saját jegyzeteiteket végig használhatjátok (arra persze nincs idő, hogy ott helyben értsetek meg valamit, de tényszerű dolgokat ki szabad puskázni). Egy vizsgázóra 20 perc jut átlagosan. A kékkel írt tételek bizonyítását csak az 5-ösért kell tudni. A tematikából mindenki kihagyhat egy témakört. Azt, hogy melyiket hagytátok ki, a tételhúzás előtt kell jelezni.

1. Testbővítések, fokszám tétel, egyszerű bővítések szerkezete, olyan bővítés létezése, amiben egy adott polinom gyöktényezők szorzatára bomlik. Tökéletes testek jellemzése a p-Frobeniusszal.

2. Relatív testhomomorfizmusok, $\mathrm{Hom}_K(K(\alpha), L)$ jellemzése α minimálpolinomjának L-beli gyökeivel. K-homomorfizmusok kiterjesztése, szeparábilis bővítések. Szeparábilis elemek résztestet alkotnak. Minden véges szeparábilis bővítés egyszerű.

3. Galois bővítések, ekvivalens jellemzések. Nevezetes bővítések Galois-csoportja. Szeparábilis polinom felbontási teste Galois-bővítés. A Galois-elmélet főtétele.

4. Véges testek szerkezete, multiplikatív csoportja, bővítések Galois-csoportja. Wedderburn tétele véges ferdetestek kommutativitásáról. A kvadratikus reciprocitási tétel.

5. Geometriai szerkesztések algebrai elmélete. Szerkeszthetőség ekvivalens jellemzése a Galois-csoport segítségével, nevezetes szerkesztési feladatok.

6. Radikálbővítések, gyökkifejezések. Ha a K alaptest tartalmazza az n-edik egységgyököket és az L/K bővítés Galois-csoportja n-edrendű ciklikus, akkor $L = K(\sqrt[n]{a})$ alkalmas $a \in K$-ra. „Egy polinom gyökei erős gyökkifejezések" $\Leftarrow \Rightarrow$ „Galois-csoportja feloldható".

7. Egész elemek gyűrűbővítésben részgyűrűt alkotnak. Algebrailag zárt test fölött az n változós polinomgyűrű minden maximális ideálja ponthoz kötött. Hilbert nullhelytétele, a Zariski topológia definíciója.

8. Féligegyszerű modulusok ekvivalens jellemzése. Féligegyszerű gyűrűk jellemzése modulusok projektivitásával és injektivitásával.

9. Gyűrű Jacobson-radikáljának ekvivalens definíciói, Nakayama-lemma. A Jacobson-radikál bal-jobb szimmetrikus.

10. Egy gyűrű pontosan akkor (bal-) féligegyszerű, ha (bal-) Artin és Jacobson-radikálja 0.

11. Féligegyszerű modulusok homogén felbontása. Schur-lemma, Jacobson-féle sűrűségi tétel. Wedderburn–Artin tétel: minden egységelemes féligegyszerű gyűrű véges sok ferdetest fölötti mátrixgyűrű direktösszege.