Algebra4 matematikus szakirány

Zárthelyi Dolgozat 2023. május 5.

Minden feladat 10 pontot ér, a dolgozatra csak pontszámot adok, jegyet nem. Az elégségeshez a dolgozatból legalább 15 pontot és a házi feladatokkal együtt legalább 35 pontot kell elérni. Ha a minimumkövetelmények teljesülnek, akkor a házi feladatokkal együtt 55 ponttól közepes, 75 ponttól jó, 95 ponttól jeles a gyakorlati jegy. A dolgozathoz egy darab $A4$-es kézzel írott puskát lehet használni. 115 perc van a megoldásra.

1. Hány elemű $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt[10]{3}), \mathbb{Q}(\sqrt[10]{27}))$?
2. Határozzuk meg az $x^6 + 1$ polinom felbontási testét $\mathbb{F}_5$ fölött.
3. Mutassuk meg, hogy az $\alpha \in \mathbb{C}$ komplex szám pontosan akkor algebrai egész, ha $2\mathrm{Re}(\alpha)$ és $|\alpha|$ is algebrai egész.
4. Határozzuk meg az $\sqrt{1+\sqrt{3}}$ minimálpolinomját $\mathbb{Q}$ fölött, továbbá a minimálpolinom felbontási testének Galois-csoportját (szintén $\mathbb{Q}$ fölött).
5. Legyen ε egy primitív n-edik egységgyök és $K \leq \mathbb{C}$ tetszőleges résztest. Igazoljuk, hogy $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\varepsilon), K)$ vagy az üres halmaz vagy $\varphi(n)$-elemű.
6. Legyen p prím. Mely $f(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ polinomok esetén létezik olyan $n \geq 1$ egész, hogy $f(x) \mid x^{p^n} - x$?
7. Legyen $K/\mathbb{Q}$ egy olyan Galois-bővítés, melynek Galois-csoportja $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \cong C_2 \times C_2$ (Klein-csoport). Igazoljuk, hogy van olyan $n \geq 1$ egész szám, hogy $K \leq \mathbb{Q}(\varepsilon_n)$, ahol ε_n egy primitív n-edik egységgyök. (Csak az órán bizonyított állításokat szabad bizonyítás nélkül felhasználni, tehát pl. a Kronecker–Weber tételt nem.)