Algebra4 matematikus szakirány

9. gyakorlat

2023. május 19.

1. Nevezzük egy M modulus $L \le M$ részmodulusát *lényegesnek* (angolul: essential, jel.: $L \le_e M$), ha minden $0 \neq N \le M$ részmodulusra $L \cap N \neq 0$. Bizonyítsuk be, hogy minden $N \le M$ részmodulushoz van olyan $N' \le M$ részmodulus, melyre $N \cap N' = 0$ és $N \oplus N' \cong N + N'$ lényeges részmodulusa M-nek.

2. Legyen M egy R-modulus. Bizonyítsuk be, hogy $\operatorname{soc}(M) = \bigcap_{L \le_e M} L$. Ezt nevezzük az M *talpának* (socle).

3. Mutassuk meg, hogy az M modulus pontosan akkor féligegyszerű, ha nincs valódi lényeges részmodulusa.

---

4. (beadandó)
   (a) Mutassuk meg, hogy ha D egy ferdetest, akkor az $M_n(D)$ teljes ($n \times n$-es) mátrixgyűrű egyszerű, azaz nincs nemtriviális kétoldali ideálja.
   (b) Igazoljuk a Wedderburn–Artin tétel megfordítását, azaz hogy ferdetest fölötti mátrixgyűrűk véges direkt összege féligegyszerű.

5.* Legyen R bal-Artin. Igazoljuk, hogy ekkor van olyan $n \ge 1$ egész szám, hogy $J(R)^n = 0$ (azaz minden n-tényezős szorzat a $J(R)$ Jacobson radikál elemeiből 0).

6.* (Hopkins tétele) Legyen R bal-Artin. Mutassuk meg, hogy ${}_RR$-nek létezik véges kompozíciólánca, azaz olyan $0 = L_0 \subsetneq L_1 \subsetneq \cdots \subsetneq L_k = R$ balideálokból álló lánc, hogy L_i/L_{i-1} egyszerű R-modulus minden $i = 1, \ldots, k$-ra. Speciálisan minden bal-Artin gyűrű bal-Noether.

---

7. Ebben a feladatban a cél az alábbi tétel bizonyítása:

Tétel (Frobenius)**.** *Legyen D egy $\mathbb{R}$ fölött végesdimenziós $\mathbb{R}$-algebra (azaz $\mathbb{R} \le Z(D)$ részgyűrű a D centrumában és $\dim_{\mathbb{R}} D < \infty$) és tegyük fel, hogy D nullosztómentes. Ekkor D izomorf az $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ (ferde)testek valamelyikével.*

Itt $\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$ a kvaterniók ferdetestét jelöli, melyben az alábbi számolási szabályok érvényesek: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$. Legyen D a tétel feltételeit teljesítő $\mathbb{R}$-algebra.

(*a*) Legyen $0 \neq \alpha \in D$ tetszőleges. Igazoljuk, hogy az α-val való szorzás, mint $D \to D$ leképezés bijektív. Speciálisan D ferdetest.

(*b*) Legyen $\alpha \in D$ olyan, hogy $\alpha \notin \mathbb{R}$. Igazoljuk, hogy α minimálpolinomja $\mathbb{R}$ fölött másodfokú és $\mathbb{R}[\alpha] \cong \mathbb{C}$. Speciálisan $\alpha^2 \in \mathbb{R}$ esetén $\alpha^2 < 0$ és ha $\dim_{\mathbb{R}} D = 2$, akkor $D \cong \mathbb{C}$.

(*c*) Legyen $b_1, b_2 \in D$ és tegyük fel, hogy $b_r^2 \in \mathbb{R}$ és $b_r^2 \le 0$ ($r = 1, 2$). Tegyük fel, hogy $1, b_1, b_2 \in D$ lineárisan összefüggő $\mathbb{R}$ fölött. Igazoljuk, hogy b_1, b_2 is lineárisan összefüggő (azaz az egyik a másiknak skalárszorosa).

(*d*) Legyen $N \subset D$ azon $b \in D$ elemek halmaza, melyekre $b^2 \in \mathbb{R}$ és $b^2 \le 0$. Igazoljuk, hogy N altér D-ben, mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortérben és $D = \mathbb{R} \oplus N$.

(*e*) Igazoljuk, hogy az $(u, v) := -\frac{uv+vu}{2} = \left(\frac{u-v}{2}\right)^2 - \left(\frac{u+v}{2}\right)^2$ egy pozitív definit szimmetrikus bilineáris függvény N-en.

(f) Tegyük fel, hogy $\dim_{\mathbb{R}} D > 2$, azaz $\dim_{\mathbb{R}} N > 1$. Vegyünk egy ONB-t N-ben a fenti skalárszorzásra nézve és legyen i, j az ONB két eleme, továbbá $k := ij$. Mutassuk meg, hogy a fenti azonosságok teljesülnek az i, j, k elemekre.

(g) Tegyük fel, hogy a fenti ONB-ben az i, j, k elemeken kívül még van egy u elem is. Jussunk ellentmondásra nullosztómentességet használva. Speciálisan $\dim_{\mathbb{R}} D > 2$ esetén $D \cong \mathbb{H}$.